Kombinatorische Optimierung 1, WS 2020-2021

1. Übungsblatt

Anmerkung: Es wird generell versucht in den Übungsblättern nur Notationen und Definitionen zu verwenden, die entweder bereits in der Vorlesung eigeführt wurden oder im Übungsblatt selbst erklärt werden. In Ausnahmefällen, die von der obigen Regel abweichen, sei auf folgendes Werk und die darin enthaltenen Symbol- und Stichwortverzeichnisse verwiesen:

> `B. Korte und J. Vygen, Kombinatorische Optimierung: Theorie und Algorithmen, Springer, 2012.`

Dieses Buch ist im TUGraz Campus unter folgendem Link frei verfügbar.
`http://link.springer.com/book/10.1007/978-3-642-25401-7`

1. Sei $G = (V, E)$ ein (ungerichteter) Graph, $c\colon E \to \mathbb{R}$ eine Kantengewichtsfunktion und $T = (V, E')$ ein Spannbaum in G. Zeigen Sie, dass folgende drei Aussagen äquivalent sind:

   (1) T ist ein minimaler Spannbaum (d.h. ein Spannbaum mit minimalem Gewicht) in G.

   (2) $\forall e = \{x, y\} \in E \setminus E'$ gilt: keine Kante des (eindeutigen) (x, y)-Weges in T hat ein höheres Gewicht als e.

   (3) $\forall e \in E'$ gilt: Ist C eine der zwei Zusammenhangskomponenten von $T - e$, so ist e eine Kante mit minimalem Gewicht im Schnitt $\delta(V(C))$.

   Zur Erinerung:

   - $\forall X \subset V(G)$ ist der Schnitt $\delta(X)$ folgendermaßen definiert
   $$\delta(X) := \Big\{\{u, v\} \in E(G)\colon u \in X, v \notin X\Big\}.$$
   - Für einen Graphen G und eine Kante $e \in E(G)$ bezeichnet $G - e$ den Gaphen G', der nach der Entfernung der Kante e aus G entsteht, d.h. $G' := \Big(V(G), E(G) \setminus \{e\}\Big)$.

2. Das Maximale-Wald-Problem (MWP)

   Eine Instanz des MWP wird durch einen (ungerichteten) Graphen $G = (V, E)$ und einer Kantengewichtsfunktion $c\colon E \to \mathbb{R}$ gegeben. Gesucht wird ein Wald mit maximalem Gewicht in G. Zeigen Sie, dass das Minimale-Spannbaum-Problem und das Maximale-Wald-Problem äquivalent sind, wobei die Äquivalenz von Problemen wie folgt definiert ist.

   Ein Problem P heißt *in linearer Zeit reduzierbar* auf ein Problem Q, wenn es zwei in linearer Zeit berechenbare Funktionen f und g gibt, so dass f eine Instanz x von P in eine Instanz $f(x)$ von Q transformiert und g eine (optimale) Lösung von $f(x)$ in eine (optimale) Lösung von x transformiert. Ist P linear reduzierbar auf Q und Q linear reduzierbar auf P, so heißen die Probleme P und Q *äquivalent*.

3. Für einen gegebenen ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit Kantengewichten $c\colon E \to \mathbb{R}$ soll ein zusammenhängender aufspannender Teilgraph minimalen Gewichtes bestimmt werden. Kann dieses Problem effizient, d.h. mit einem polynomiellen Algorithmus, gelöst werden? Wie?

4. Gesucht ist die Menge derjenigen Kanten e in einem ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit Kantengewichten $c\colon E \to \mathbb{R}$, für die es einen enthaltenden spannenden Baum minimalen Gewichtes in G gibt (oder anders ausgedruckt, man möchte die Vereinigung aller aufspannenden Bäume minimalen Gewichtes in G bestimmen). Geben Sie einen möglichst effizienten Algorithmus zur Lösung dieses Problems an und analysieren Sie die Zeitkomplexität Ihres Algorithmus.

5. *Das Engpass-Spannbaum-Problem (bottleneck MST)*
Für einen gegebenen ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit Kantengewichten $c: E \to \mathbb{R}$ soll ein spannender Baum T gefunden werden, mit der Eigenschaft, dass das Gewicht der schwersten Kante in T so gering wie möglich ist. Geben Sie einen möglichst effizienten Algorithmus zur Lösung dieses Problems an und analysieren Sie die Zeitkomplexität ihres Algorithmus.

6. Beweisen folgenden in der Vorlesung formulierten Satz.

   Sei G ein Digraph mit n Knoten und $r \in V(G)$. Dann sind die folgenden sieben Aussagen äquivalent:

   (a) G ist eine Arboreszenz mit Wurzel r (d.h. G ist ein zusammenhängendes Branching mit $\delta^-(r) = \emptyset$).

   (b) G ist ein Branching mit $n-1$ (gerichteten) Kanten[1] und $\delta^-(r) = \emptyset$.

   (c) G hat $n-1$ Kanten und jeder Knoten ist von r aus erreichbar.

   (d) Jeder Knoten ist von r aus erreichbar aber das Entfernen einer beliebigen Kante zerstört diese Eigenschaft.

   (e) G erfüllt $\delta^+(X) \neq \emptyset$ für alle $X \subsetneq V(G)$ mit $r \in X$, die Entfernung einer beliebigen Kante zerstört jedoch diese Eigenschaft.

   (f) $\delta^-(r) = \emptyset$ und für jedes $v \in V(G) \setminus \{r\}$ gibt es einen eindeutig bestimmten (gerichteten) r-v-Weg in G.

   (g) $\delta^-(r) = \emptyset$ und $|\delta^-(r)| = 1$ für alle $v \in V(G) \setminus \{r\}$ und G ist kreisfrei.

[1] Die gerichteten Kanten eines gerichteten Graphen werden im Allgemeinen einfach „Kanten“ genannt.