Kombinatorische Optimierung 1, WS 2020-2021

4. Übungsblatt

21. Verwenden Sie den Push-Relabel Algorithmus zur Bestimmung eines maximalen s-t-Flusses im Netzwerk in Abbildung 1. Die Zahlen neben den Kanten sind die Kantenkapazitäten. Führen Sie folgende zwei Varianten des Algorithmus durch:

    (a) Die aktiven Knoten werden in einer FIFO Liste („First In First Out“ gespeichert. Neue aktiv gewordene Knoten werden am Ende der Liste hinzugefügt. Die aktuelle Push/Relabel Iteration wird stets am ersten aktiven Knoten in der Liste durchgeführt. Für jeden aktiven Knoten v wird auch eine FIFO Liste der mit v inzidierenden Kanten in G_f geführt. Die aktuelle Push Operation wird stets über die erste erlaubte Kante in der Liste des ausgewählten aktiven Knoten durchgeführt.

    (b) Es wird immer der aktive Knoten mit der höchsten Distanzmarkierung ausgewählt. Die Auswahl der Kante für die Push-Operation erfolgt mit Hilfe einer FIFO Liste wie in der Variante (a).

    Vergleichen Sie die Anzahl der Relabel, saturierende-Push und nicht-saturierende-Push Operationen in den beiden Varianten des Algorithmus.

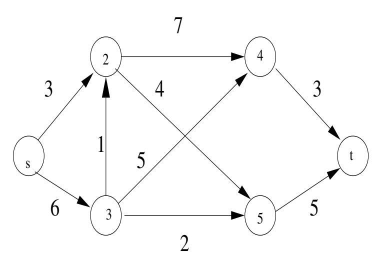

Abbildung 1: Netzwerk für Bsp. 21 und 23

22. Bestimmen Sie eie Flusszerlegung im Sinne des Flusszerlegungssatzes von Gallai (vgl. Vorlesung) für dem optimalen Fluss in Beispiel 21. Gehen Sie heirfür systematisch vor und führen die selben Schritte wie im Beweis des Satzes durch (vgl. Vorlesung).

23. Bestimmen Sie unter Anwendung der MA-Reihenfolge (Ansatz von Stoer und Wagner, 1997, vgl. Vorlesung) einen Schnitt mit minimaler Kapazität für das Netzwerk in Abbildung 1.

24. Sei (G, u, s, t) ein Netzwerk mit Kapazitäten $u\colon E(G) \to \mathbb{Z}_+$. In diesem Graph wird jener minimaler s-t-Schnitt gesucht, der unter allen minimalen s-t-Schnitten die geringste Anzahl von Kanten besitzt. Zeigen Sie, dass ein minimaler s-t-Schnitt in $(G, \bar{u}, s, t)$ mit $\bar{u}(e) = |E(G)|u(e) + 1$, $\forall e \in E(G)$, ein minimaler s-t-Schnitt mit der kleinsten Anzahl von Kanten in (G, u, s, t) ist.

25. Eine Fluglinie möchte einen aus n Flügen bestehenden Flugplan mit möglichst wenigen Fliegern umsetzen. Alle zur Verfügung stehenden Flieger sind identisch. Für jeden Flug i sei die Abflugzeit d_i und die Flugdauer t_i gegeben, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Weiters sei für jedes geordnete Paar (i, j) von Flügen, die Zeit δ_{ij} gegeben, die benötigt wird um einen Flieger für den Flug j bereit zu machen, nachdem er den Flug i absolviert hat, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Wie kann ein zulässiger Flugplan, der alle Flüge absolviert und möglichts wenige Flieger benötigt, effizient erstellt werden?

26. Sei G ein einfacher ungerichteter Graph mit mindestens 2 Knoten und sei der Grad von jedem Knoten in G mindestens k, für ein $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass es in G zwei Knoten s und t gibt, die durch mindestens k kantendisjunkte Wege verbunden sind. Gilt die obige Aussage auch wenn G genau einen Knoten mit Grad kleiner als k enthält? Begründen Sie Ihre Antwort.

    Hinweis: Verwenden Sie den Gomory-Hu-Baum für G.