

Kombinatorische Optimierung 1, WS 2020-2021

7. Übungsblatt

39. Verwenden Sie den *Edmonds Blossom Algorithmus* zur Bestimmung eines Matchings mit maximaler Kardinalität in dem Graphen in Abbildung 1. Initialisieren Sie den Algorithmus mit dem leeren Matching. Geben Sie eine Teilmenge S der Knotenmenge an, die die Tutte-Berge-Formel erfüllt und begründen Sie ihre Antwort.

40. Beweisen oder widerlegen Sie: In jedem Graphen gibt es eine Barriere.

Zur Erinnerung: Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $A \subseteq V$ eine Teilmenge der Knotenmenge V . A heißt Barriere falls A die Tutte-Berge Ungleichung mit Gleichheit erfüllt (siehe Vorlesung).

41. Betrachten Sie einen bipartiten Graphen $G = (A \dot{\cup} B, E)$ mit Kantengewichten $c: E \rightarrow \mathbb{R}$, die durch folgende matrix $C = (c_{ij})$ gegeben sind:

$$C = \begin{pmatrix} 10 & \infty & 3 & \infty & \infty \\ 7 & \infty & 2 & \infty & \infty \\ 4 & \infty & 10 & \infty & \infty \\ \infty & 7 & 14 & \infty & 10 \\ \infty & 6 & \infty & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Der Eintrag c_{ij} entspricht dem Gewicht der Kante $\{v_i, w_j\}$ in E , wobei $A := \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ und $B := \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$. Für $i, j \in \overline{1, 5}$ mit $\{v_i, w_j\} \notin E$ wird $c_{ij} = \infty$ gesetzt.

- Besitzt G ein perfektes Matching? Begründen Sie ihre Antwort mit Hilfe der Hall Bedingung.
- Fügen Sie dem Graphen G möglichst wenige Kanten hinzu, sodass der daraus resultierende Graph G' ein perfektes Matching besitzt.
- Versehen Sie alle in (b) hinzugefügten Kanten mit Gewicht 1 und bestimmen Sie mit Hilfe eines Algorithmus zur Lösung des Minimalen Kostenflussproblems ein perfektes Matching mit minimalem Gewicht in G' .

42. Betrachten wir eine Menge von Studentinnen und Studenten und eine Menge von Seminaren. Jeder Studierende wählt 3 Seminare, die seine/ihre Interessen am besten entsprechen. Zwei Seminare werden von 40 Studierenden gewählt, alle anderen von weniger als 40 Studierenden.

- Zeigen Sie, dass es möglich ist, jeden Studierenden zu einem Seminar aus seiner Kandidatenliste zuzuordnen ohne in einem Seminar mehr als 13 Studierende einzuteilen.
- Kann man eine derartige Zuordnung von Studierenden zu Seminaren in $O(n^2)$ Zeit bestimmen, wenn n die Anzahl der Seminare ist?

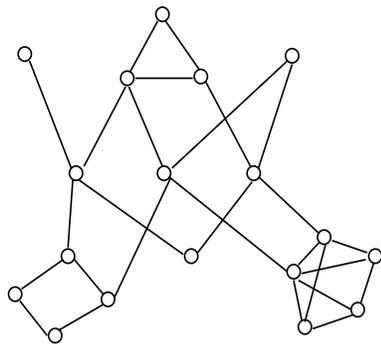


Abbildung 1: Graph für Aufgabe 39.