Kombinatorische Optimierung 1, WS 2020-2021

9. Übungsblatt

50. Sei E eine Grundmenge und $\mathcal{F} \subseteq 2^E$ eine Familie von Teilmengen von E. Zeigen Sie, dass die folgenden Paare $(E, \mathcal{F})$ Unabhängigkleitsysteme jedoch im Allgemeinen keine Matriode sind.

    (a) Sei G ein ungerichteter Graph. Betrachte $(E, \mathcal{F})$ mit $E = V(G)$ und
    $$\mathcal{F} = \{F \subseteq E \colon F \text{ ist eine stabile Menge in } G\}\,.$$

    (b) Sei G ein vollständiger, ungerichteter Graph. Betrachte $(E, \mathcal{F})$ mit $E = E(G)$ und $\mathcal{F} = \{F \subseteq E \colon F$ ist eine Teilmenge eines hamiltonschen Kreises in $G\}$.

    (c) Sei G ein Digraph und $s, t \in V(G)$, $s \neq t$, sodass t von s aus erreichbar ist. Betrachte $(E, \mathcal{F})$ mit $E = E(G)$ und $\mathcal{F} = \{F \subseteq E \colon F$ ist eine Teilmenge eines s-t-Weges in $G\}$.

    (d) Gegeben seien die nichtnegativen Zahlen $n \in \mathbb{N}$, $w_i \in \mathbb{R}_+$, for $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ und $W \in \mathbb{R}_+$. Betrachte $(E, \mathcal{F})$ mit $E = \{1, 2, \ldots, n\}$ und $\mathcal{F} = \{F \subseteq E \colon \sum_{j \in F} w_j \leq W\}$.

    (e) Sei G ein Digraph. Betrachte $(E, \mathcal{F})$ mit $E = E(G)$ und $\mathcal{F} = \{F \subseteq E \colon (V, F)$ ist ein Branching in $G\}$.

    (f) Sei G ein ungerichteter Graph. Betrachte $(E, \mathcal{F})$ mit $E = E(G)$ und $\mathcal{F} = \{F \subseteq E \colon F$ ist ein Matching in $G\}$.

51. Betrachten Sie das Unabhängigkeitssystem aus Übungsbeispiel 50 (a) für $G = C_4$, d.h. G ist ein Kreis auf 4 Knoten: Geben Sie die Menge $\mathcal{B}$ der Basen, die Menge $\mathcal{C}$ der Kreise (äquivalent auch Zyklen genannt), die Rangfunktion $r \colon 2^E \to \mathbb{N}$, die untere Rangfunktion $\rho \colon 2^E \to \mathbb{N}$, den Rangquotienten $q(E, \mathcal{F})$, sowie die Abschlussfunktion $\sigma \colon 2^E \to \mathbb{N}$ explizit an.

52. (a) Sei G ein bipartiter Graph mit Bipartition $V(G) = A \dot\cup B$ und $(A, \mathcal{F})$ ein Matroid. Zeigen Sie, dass folgendes Paar
    $$(B, \{Y \subseteq B \colon Y = \emptyset \text{ oder } \exists X \in \mathcal{F}, \text{ sodass } G[X \cup Y] \text{ ein perfektes Matching besitzt}\})$$
    ein Matroid ist. Hier ist $G[X \cup Y]$ der durch $X \cup Y$ induzierter Teilgraph von G, d.h. die Knotenmenge von $G[X \cup Y]$ ist $X \cup Y$ und die Kantenmenge besteht aus jenen Kanten von G, deren Endknoten in $X \cup Y$ enthalten sind.

    (b) Sei G ein Graph und $\mathcal{F}$ eine Familie von Teilmengen X der Knotenmenge $V(G)$, mit folgender Eigenschaft; es gibt ein Matching mit maximaler Kardinalität in G, das keinen Knoten aus X überdeckt. Zeigen Sie, dass $(V(G), \mathcal{F})$ ein Matroid ist. Geben Sie das dazugehörige duale Matroid an.

53. Angenommen die Kanten eines Graphen G sollen so gefärbt werden, dass G keinen monochromatischen Kreis enthält, d.h G soll keinen Kreis enthalten, alle dessen Kanten die gleiche Farbe tragen. Das Ziel ist, ene derartige Färbung mit minimaler Anzahl von Farben zu finden. Zeigen Sie, dass dieses Problem polynomial lösbar ist.