

Beweis Satz 6

①

$0 < k_1 < k_2 < \dots < k_n$ Ausübungspreis der
 n Europäischen Call Optionen (ECO)

alle mit Fälligkeit t_1 ($t_1 > t_0 :=$ aktueller Zeitpunkt)

alle geschrieben über denselben Basiswert

$S_0^{(i)}$ ist der heutige Preis (z. Z. Punkt t_0) der ECO

mit Ausübungspreis k_i , $i \in \overline{1, n}$

Es gibt keine Arbitrage in den Preisen $S_0^{(i)}$, $i \in \overline{1, n}$

$\Leftrightarrow$ die folgenden 3 Bedingungen sind erfüllt

(i) $S_0^{(i)} > 0 \quad \forall i \in \overline{1, n}$

(ii) $S_0^{(i)} > S_0^{(i+1)} \quad \forall i \in \overline{1, n-1}$

(iii) $C: [k_1, k_n] \rightarrow \mathbb{R}$ stückweise linear mit
 $C(k_i) := S_0^{(i)}$, $i \in \overline{1, n}$

ist strikt konvex.

(LP) $\min_{u \in NB} S_0^t x$
 $Ax \geq 0$

mit $A = \begin{pmatrix} k_2 - k_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ k_3 - k_1 & k_3 - k_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ k_n - k_1 & k_n - k_2 & k_n - k_3 & \dots & k_n - k_{n-1} & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Begründung für diese Matrix A :

Das ursprüngliche LP war $\min_{u \in NB} S_0^t x$

$\sum_{i=1}^n \varphi_i(0) x_i \geq 0 \quad (*)$
 $(**) \quad \sum_{i=1}^n \varphi_i(k_j) x_i \geq 0 \quad \forall j \in \overline{1, n}$
und

$$\sum_{i=1}^n (\psi_i(k_{n+1}) - \psi_i(k_n)) x_i \geq 0 \quad (***) \quad (2)$$

mit $\psi_i(s) = \max(s - k_i, 0) = (s - k_i)^+$

Somit ist $\psi_i(0) = 0$ und $(*)$ ist redundant

Betrachte $(**)$ für $j=1$:

$$\sum_{i=1}^n \psi_i(k_1) x_i = \sum_{i=1}^n \underbrace{\max\{k_1 - k_i, 0\}}_{=0 \text{ weil } k_1 < k_i, \forall i} x_i = 0$$

Somit ist auch diese Restriktion obsolet

Für $j=2$ erhält man

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \psi_i(k_2) x_i &= \sum_{i=1}^n \max\{k_2 - k_i, 0\} x_i = \\ &= (k_2 - k_1) x_1 + 0 + \dots + 0 \end{aligned}$$

und so weiter für $j=n$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \psi_i(k_n) x_i &= \sum_{i=1}^n \max\{k_n - k_i, 0\} x_i = \\ &= (k_n - k_1) x_1 + \dots + (k_n - k_{n-1}) x_{n-1} \end{aligned}$$

Somit entsprechen die Restriktionen $(**)$ für $j \in \overline{2, n}$ den ersten $n-1$ Zeilen von A

Restriktion $(***)$:

$$\begin{aligned} \psi_i(k_{n+1}) - \psi_i(k_n) &= \max\{k_{n+1} - k_i, 0\} - \max\{k_n - k_i, 0\} \\ &= k_{n+1} - k_i - (k_n - k_i) = 1 \end{aligned}$$

entspricht der letzten Zeile von A

Aus Dual von LP

$$(DLP) \quad \max \quad 0^t y \\ A^t y = S_0 \\ y \geq 0$$

Aus Proposition 4 und Proposition 5 wissen wir

Es gibt keine Arbitrage in $S_0^{(i)}$, $i \in \overline{1, n} \iff$

der Opt. z-Wert von LP (DLP) $= 0$ und DLP

besitzt eine strikt positive Optimallösung.

Da die Zielfunktion von DLP konstant Null ist, ist nur die rot unterstrichene Bedingung relevant

$\iff$ DLP besitzt eine strikt positive Lösung

Beobachtung: $\det A = (k_2 - k_1)(k_3 - k_2) \dots (k_n - k_{n-1}) > 0$

$\Rightarrow A^t y = S_0$ hat eine eindeutige Lösung y^*

Da A^t eine obere Dreiecksmatrix lässt sich diese leicht berechnen

Aus letzter Gleichung (Skalare Gleichung) in $A^t y^* = S_0$

erhält man $1 \cdot y_n^* = S_0^{(n)}$

Aus der vorletzten skalaren Gleichung in $A^t y^* = S_0$:

$$(k_n - k_{n-1}) y_{n-1}^* + y_n^* = S_0^{(n-1)} \Rightarrow y_{n-1}^* = \frac{S_0^{(n-1)} - S_0^{(n)}}{k_n - k_{n-1}}$$

Aus der $(n-2)$ -ten Gleichung in $A^t y^* = S_0$:

$$(k_{n-1} - k_{n-2}) y_{n-2}^* + (k_n - k_{n-2}) y_{n-1}^* + y_n^* = S_0^{(n-2)} \rightarrow$$

(4)

$$\begin{aligned} \Rightarrow y_{n-2}^* &= \left[S_0^{(n-2)} - S_0^{(n)} - (k_n - k_{n-2}) \right]_{n-1}^* \cdot \frac{1}{k_{n-1} - k_{n-2}} \\ &= \frac{1}{k_{n-1} - k_{n-2}} \left[S_0^{(n-2)} - S_0^{(n-1)} + S_0^{(n-1)} - S_0^{(n)} - (k_n - k_{n-2}) \right] \frac{S_0^{(n-1)} - S_0^{(n)}}{k_n - k_{n-1}} \\ &= \frac{S_0^{(n-2)} - S_0^{(n-1)}}{k_{n-1} - k_{n-2}} - \frac{1}{k_{n-1} - k_{n-2}} \left[\left(\frac{k_n - k_{n-2}}{k_n - k_{n-1}} - 1 \right) S_0^{(n-1)} - S_0^{(n)} \right] \\ &= \frac{S_0^{(n-2)} - S_0^{(n-1)}}{k_{n-1} - k_{n-2}} - \frac{1}{k_{n-1} - k_{n-2}} \cdot \frac{k_n - k_{n-2}}{k_n - k_{n-1}} \left(S_0^{(n-1)} - S_0^{(n)} \right) \\ &= \frac{S_0^{(n-2)} - S_0^{(n-1)}}{k_{n-1} - k_{n-2}} - \frac{S_0^{(n-1)} - S_0^{(n)}}{k_n - k_{n-1}} = y_{n-2}^* \end{aligned}$$

Für die weiteren Indizes i , $1 \leq i < n-2$, erhalten wir via Induktion

$$y_i^* = \frac{S_0^{(i)} - S_0^{(i+1)}}{k_{i+1} - k_i} - \frac{S_0^{(i+1)} - S_0^{(i+2)}}{k_{i+2} - k_{i+1}}$$

Nun überprüfen wir nur noch das $y_n^* > 0$ und die Bedingungen (i)–(iii) äquivalent sind.

$\Rightarrow$

$$y_n^* > 0 \Leftrightarrow S_0^{(n)} > 0$$

$$y_{n-1}^* > 0 \Leftrightarrow \frac{S_0^{(n-1)} - S_0^{(n)}}{k_n - k_{n-1}} > 0 \Leftrightarrow S_0^{(n-1)} > S_0^{(n)}$$

$$\text{Angenommen } y_i^* > 0 \Rightarrow S_0^{(i)} > S_0^{(i+1)}$$

$$\text{Zeigen wir } y_{i+1}^* > 0 \Rightarrow S_0^{(i+1)} > S_0^{(i+2)}$$

Tatsächlich

5

$$\forall i \geq 2 \quad y_{i-1}^* = \frac{s_0^{(i-1)} - s_0^{(i-2)}}{k_i - k_{i-1}} - \frac{s_0^{(i)} - s_0^{(i+1)}}{k_{i+1} - k_i} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{s_0^{(i-1)} - s_0^{(i)}}{k_i - k_{i-1}} > \frac{s_0^{(i)} - s_0^{(i+1)}}{k_{i+1} - k_i} > 0 \Rightarrow s_0^{(i-1)} > s_0^{(i)}$$

Somit haben wir $s_0^{(1)} > s_0^{(2)} > \dots > s_0^{(n)} > 0$.

Es bleibt also nur noch die ^{Strikte} Konvexität von C .

Da C stückweise linear ist die ^{Strikte} Konvexität von C dann und nur dann gegeben, wenn die Gradienten der linearen Stücke ^{strikt} monoton steigen sind.

Da aber die linearen Stücke über $[k_i, k_{i+1}]$ durch $C(k_i) = s_0^{(i)} \quad \forall i \in \overline{1, n-1}$, gegeben sind sind deren Gradienten durch $\Delta_i = \frac{s_0^{(i+1)} - s_0^{(i)}}{k_{i+1} - k_i} < 0$

gegeben und es gilt

$$y_i^* > 0 \Rightarrow \frac{s_0^{(i)} - s_0^{(i+1)}}{k_{i+1} - k_i} > \frac{s_0^{(i+1)} - s_0^{(i+2)}}{k_{i+2} - k_{i+1}}$$

$$\Leftrightarrow - \frac{s_0^{(i+1)} - s_0^{(i)}}{k_{i+1} - k_i} > - \frac{s_0^{(i+2)} - s_0^{(i+1)}}{k_{i+2} - k_{i+1}}$$

$$\Leftrightarrow \Delta_i > -\Delta_{i+1} \Rightarrow \Delta_{i+1} > \Delta_i$$

$\Leftrightarrow$ Also sind Δ_i monoton steigend.
 $\Leftrightarrow$ ist trivial

