Die Karush-Kuhn-Tucker Bedingungen

Wir betrachten folgendes Optimierungsproblem P

$$
\begin{array}{llcll}
\min & f(x) & & & \\
\text{u.d.Nb.} & & & & \\
 & g_i(x) & = & 0 & i \in \mathcal{E} \\
 & g_i(x) & \geq & 0 & i \in \mathcal{I}
\end{array}
$$

wobei die Funktionen $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $g_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i \in \mathcal{E} \cup \mathcal{I}$ stetig differenzierbar sind.

Sei $\lambda = (\lambda_i)_{i \in \mathcal{E} \cup \mathcal{I}}$ ein Vektor von Lagrange Multiplikatoren und $L(x, \lambda) := f(x) - \sum_{i \in \mathcal{E} \cup \mathcal{I}} \lambda_i g_i(x)$ die Lagrange Funktion.

Definition: Sei $\mathcal{X} := \left\{x \in \mathbb{R}^n\colon g_i(x) = 0, \forall i \in \mathcal{E}, g_i(x) \geq 0, \forall i \in \mathcal{I}\right\}$ die Menge der zulässigen Lösungen (oder Punkten) von P.

Ein für P zulässiger $x \in \mathbb{R}^n$ heißt regulärer Punkt (bzgl. den Restriktionen von P) falls $\nabla g_i(x)$, $i \in \mathcal{E} \cup \mathcal{J}$, linear unabhängig sind, wobei $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$ die Indizes der von x mit Gleichheit erfüllten Ungleichheitsrestriktionen sind.

Die entsprechenden Restriktionen $g_i(x) = 0$, $i \in \mathcal{E} \cup \mathcal{J}$, werden *aktive Restriktionen* in x genannt.

Notwendige Optimalitätsbedingungen 1. Ordnung

Sei P das oben definierte Problem mit stetig differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i \in \mathcal{E} \cup \mathcal{I}$. Für jeden regulären Punkt x^*, der ein lokales Optimum von f auf $\mathcal{X}$ ist, existiert ein Vektor von Lagrange Multiplikatoren λ, der folgende Bedingungen erfüllt:

$$\nabla f(x^*) - \sum_{i \in \mathcal{E} \cup \mathcal{I}} \lambda_i \nabla g_i(x^*) = 0 \tag{1}$$

$$\lambda_i \geq 0 \qquad \forall i \in \mathcal{I} \tag{2}$$

$$\lambda_i g_i(x^*) = 0 \qquad \forall i \in \mathcal{I} \tag{3}$$

Anmerkung: Die notwendigen Optimalitätsbedingungen 1. Ordnung sind auch von lokalen Maxima und Sattelpunkten der Funktion f auf $\mathcal{X}$ erfüllt.

Falls f and g_i, $i \in \mathcal{E} \cup \mathcal{I}$, zweimal stetig differenzierbar sind, dann können Maxima und Sattelpunkte mit Hilfe der Bedingungen 2. Ordnung ausgeschlossen werden.

Notwendige Optimalitätsbedingungen 2. Ordnung

Sei P das oben definierte Problem mit zweimal stetig differenzierbaren Funktionen $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $g_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i \in \mathcal{E} \cup \mathcal{I}$. Für jeden regulären Punkt x^*, der ein lokales Optimum von f auf $\mathcal{X}$ ist, existiert ein Vektor von Lagrange Multiplikatoren λ, der neben (1), (2), (3) auch die folgende Bedingung erfüllt:

$$N^t(x^*)\Big(\nabla^2 f(x^*) - \sum_{i \in \mathcal{E} \cup \mathcal{I}} \lambda_i \nabla^2 g_i(x^*)\Big) N(x^*) \text{ ist positiv semidefinit.} \quad (4)$$

∇^2 stellt (wie üblich) die Hesse Matrix dar.

$N(x^*)$ ist eine Basis des Kerns der folgenden linearen Abbildung

$$F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{|\mathcal{E}|+|\mathcal{J}|}\,, x \mapsto A(x^*)x\,,$$

wobei $A(x^*)$ die Jacobi Matrix der in x^* aktiven Restriktionen mit Indizes in $\mathcal{E} \cup \mathcal{J}$ ist.

Anmerkung: Falls es für einen regulären Punkt x^* Lagrange Multiplikatoren existieren, die die Bedingungen (1)-(4) erfüllen, so ist x^* nicht notwendigerweise ein lokales Minimum. Die hinreichenden Bedingungen sind etwas restriktiver.

Hinreichende Optimalitätsbedingungen 2. Ordnung

Sei P das oben definierte Problem mit zweimal stetig differenzierbaren Funktionen $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $g_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i \in \mathcal{E} \cup \mathcal{I}$. Sei x^* ein (zulässiger und) regulärer Punkt. Sei $A(x^*)$ die Jacobi Matrix der in x^* aktiven Restriktionen und $N(x^*)$ eine Basis des Kerns der lineare Abbildung $x \mapsto A(x^*)x$ (wie bei den notwendigen Bedingungen 2. Grades).

Dann gilt:
x^* ist ein lokales Minimum von f auf $\mathcal{X}$, falls
(a) ein Vektor von Lagrange Multiplikatoren λ existiert, der die Bedingungen (1)-(3) und die Implikation (5) erfüllt

$$g_i(x^*) = 0, i \in \mathcal{I} \Longrightarrow \lambda_i > 0 \tag{5}$$

und
(b) die Matrix

$$N^t(x^*)\Big(\nabla^2 f(x^*) - \sum_{i \in \mathcal{E} \cup \mathcal{I}} \lambda_i \nabla^2 g_i(x^*)\Big) N(x^*) \text{ ist positiv definit.} \tag{6}$$