

SoSe 2: (Kono Yamazaki 1991)

①

Sei $(R_1, R_2, \dots, R_n)$ multivariat normal verteilt.

Dann gilt $w_x = \sigma_x \frac{\mathbb{E}}{\sqrt{\mathbb{V}}}$, + Portfolio x .

Beweis Sei $\mu := \mathbb{E}(R_1, R_2, \dots, R_n)$ und Σ die Kovarianzmatrix von $(R_1, R_2, \dots, R_n)$. Sei x ein fixes PF.

Für den Portfolioertrag $R_x := \sum_{i=1}^n x_i R_i$ gilt

$$R_x \sim N\left(\underbrace{\sum_{i=1}^n \mu_i x_i}_{=: \sigma_x^2}, \underbrace{x^t \Sigma x}_{=: \sigma_x^2}\right)$$

Sei $U := \sum_{i=1}^n (R_i - \mu_i) x_i \sim N(0, \sigma_x^2)$ mit Dichtefunk

$$f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma_x^2}\right).$$

$$\text{Dann gilt } \underline{w_x} := \mathbb{E}(|U|) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} |u| e^{-\frac{u^2}{2\sigma_x^2}} du =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} \int_0^{+\infty} u e^{-\frac{u^2}{2\sigma_x^2}} du = \frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} \int_0^{+\infty} \sigma_x^2 e^{-t} dt$$

$$\text{Substitution } t := \frac{u^2}{2\sigma_x^2} \quad dt = \frac{u}{\sigma_x^2} du$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \underline{\underline{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \sigma_x}}$$



(MAD)

$$\min \mathbb{E}\left(\left|\sum_{i=1}^n (R_i - \mu_i) x_i\right|\right)$$

u.d.NB

$$\sum_{i=1}^n \mu_i x_i \geq r$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1 \quad \left(\begin{array}{l} + \text{eventuell } 0 \leq x_i \leq m_i, \\ \forall i \in \overline{1, n} \end{array} \right)$$

MAD lässt sich nun als lineares Optimierungsproblem schreiben.

Sei r_{ik} die realisierte Rendite der Aktie i im Zeitintervall $[t_{k-1}, t_k]$ (in der Vergangenheit), für $k=1, \dots, T$ (T ist # der betrachteten Zeitintervalle oder Perioden).

μ_i wird durch $\hat{\mu}_i := \frac{1}{T} \sum_{k=1}^T r_{ik}$, $\forall i \in \overline{1, n}$

Somit ergibt sich folgender Schätzer für $\mu_i = E(\sum_{i=1}^n r_{ik})$

$$\hat{\mu}_k := \frac{1}{T} \sum_{k=1}^T \left| \sum_{i=1}^n (r_{ik} - \hat{\mu}_i) x_i \right|$$

Der Betrag wird eliminiert mit Hilfe zweier Hilfsvariablen y_k und z_k mit $y_k \geq 0, z_k \geq 0, y_k + z_k = 0$. (Dies entspricht

$$A_k = \left| \sum_{i=1}^n (r_{ik} - \hat{\mu}_i) x_i \right| = y_k + z_k$$

$A_k = y_k - z_k$

$$y_k = \begin{cases} A_k & A_k \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad z_k = \begin{cases} -A_k & A_k < 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

MAD als lineares Programm:

$$\min \frac{1}{T} \sum_{k=1}^T (y_k + z_k)$$

(LP-MAP)

$$y_k - z_k = \sum_{i=1}^n (r_{ik} - \hat{\mu}_i) x_i, \quad \forall k \in \overline{1, T} \quad *$$

$$\sum_{i=1}^n \hat{\mu}_i x_i \geq r$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1$$

$$0 \leq x_i \leq m_i \quad \forall i \in \overline{1, n}$$

$$y_k, z_k \geq 0 \quad \forall k \in \overline{1, T}$$

Anmerkungen

ist in LP-MAD redundant

(*) Stellt $A_k = y_k - z_k$ oder $|A_k|$ folgt aus (**)
 $A_k \in |A_k|$

Ertrag-basierte Investitionsanalyse

(3)

Ein lineares Faktormodell:

R_t : Ertrag des Fonds z.Z.P. $t \quad t \in \{1, 2, \dots, T\}$

(T ist die Anzahl der Perioden im Modellierungsfenster)

F_{it} : Ertrag des i -ten Faktors zum Zeitpunkt t

w_i : Gewicht des i -ten Faktors, $i \in \overline{1, n}$

$$\forall t \in \overline{1, T} \quad R_t = \sum_{i=1}^n w_i F_{it} + \epsilon_t$$

→ Teil des Fond-Ertrags, der nicht durch die Faktoren erklärbar ist; könnte etwa durch aktives Management beeinflusst werden.

Wir interpretieren $F_t' w$ als Rendite des Benchmark-PF zum Zeitpunkt t ($F_t' w = \sum_{i=1}^n F_{it} w_i$) mit

$$F_t' = (F_{1t}, F_{2t}, \dots, F_{nt})$$

Annahme: $\sum_{i=1}^n w_i = 1$; $w_i \geq 0 \quad \forall i \in \overline{1, n}$

Ziel: Wähle $w := (w_1, w_2, \dots, w_n)'$ so, dass die Varianz der faktorunabhängigen Ertrags minimiert wird.

$$\begin{aligned} \min_{\substack{\text{uDNB} \\ \sum_{i=1}^n w_i = 1 \\ w_i \geq 0, \quad \forall i \in \overline{1, n}}} \text{Var}(\epsilon_t) &= \text{Var} \left(R_t - \sum_{i=1}^n F_{it} w_i \right)_{1 \leq t \leq T} \end{aligned}$$

Anmerkung: Diese Problem ist fast äquivalent zur Maximierung des R^2 des linearen Regressionsmodells

$$R_t = \sum_{i=1}^n w_i F_{it} + \epsilon_t$$

'fast' weil in einem beschränkten Regressionsmodell eine nicht verschwindende Korrelation zwischen F_t und ϵ_t gegeben kann.

Nun zeigen wir, dass es sich beim obigen Problem um ein konvex-quadratisches Minimierungsproblem handelt:

Umformulierung der Zielfunktion:

$$\text{var}(R - Fw) \quad \left. \begin{array}{l} R' := (R_1, \dots, R_T), F = \begin{pmatrix} \bar{F}_1 \\ \vdots \\ \bar{F}_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{11} & \dots & F_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{T1} & \dots & F_{Tn} \end{pmatrix} \\ R \in \mathbb{R}^T \text{ und } w \in \mathbb{R}^n, \\ w' = (w_1, \dots, w_n) \text{ und} \\ F \in \mathbb{R}^{T \times n} \end{array} \right\}$$

$$\stackrel{(\text{approx.})}{=} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (R_t - F_t^T w)^2 = \left[\frac{\sum_{t=1}^T (R_t - F_t^T w)}{T} \right]^2$$

$$= \frac{1}{T} \|R - Fw\|^2 - \left(\frac{e'(R - Fw)}{T} \right)^2 \quad (\text{wobei } e' = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^T)$$

$$= \frac{\|R\|^2}{T} - \frac{(e'R)^2}{T^2} - 2 \left(\frac{R'F}{T} - \frac{e'R}{T^2} e'F \right) w + w' \left(\underbrace{\frac{1}{T} F'F - \frac{1}{T^2} F'e e'F}_{=: Q} \right) w$$

Die Konvexität dieser quadratischen Fkt. ist leicht zu überprüfen; dazu reicht es die positive Semidefinitheit der Koeffizientenmatrix des quadratischen Terms zu überprüfen.

$$Q = \frac{1}{T} F'F - \frac{1}{T^2} F'e e'F = \frac{1}{T} F' \left(\underbrace{I - \frac{e e'}{T}}_{\substack{\text{Einheitsmatrix} \\ \text{in } \mathbb{R}^{T \times T}}} \right) F$$

Sei $M := I - \frac{e e'}{T} \in \mathbb{R}^{T \times T}$

Wenn $M \succcurlyeq 0$ so ist auch $Q \succcurlyeq 0 \quad \left(\underbrace{Q^T Q a = (Fa)' M (Fa)}_{\forall a \in \mathbb{R}^T} \right)$

Wir zeigen, dass die Eigenwerte von M nicht negativ sind

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{T} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{T} \begin{pmatrix} T-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & T-1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \dots & T-1 \end{pmatrix}$$

Es reicht also die Eigenwerte von A zu berechnen: $\det(A - \lambda I) = 0$; $A - \lambda I = \begin{pmatrix} T-1-\lambda & -1 & \dots & -1 \\ -1 & T-1-\lambda & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \dots & T-1-\lambda \end{pmatrix} =: A$

Allgemeiner betrachten wir eine quadr. $n \times n$ Matrix der Form (5)

$$\bar{D}_n = \begin{pmatrix} a-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & a-1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \dots & a-1 \end{pmatrix} \text{ und berechnen ihre Determinante}$$

Wir erhalten A durch $a = T - \lambda$ und $n = T_0$

Es gilt $\det(\bar{D}_n) = \det \begin{pmatrix} a & 0 & \dots & 0 & -a \\ 0 & a & \dots & 0 & -a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a & -a \\ -1 & -1 & \dots & -1 & a-1 \end{pmatrix} = \det(D_n)$

und es gilt auch folgende Rekursion

$$\det(D_n) = a^2 \det(D_{n-2}) - 2a^{n-1}$$

$$\Rightarrow \det(D_n) = \begin{cases} a^{n-2} \det(D_2) - (n-2)a^{n-1} & \text{für } n \text{ gerade} \\ a^{n-1} \det(D_1) - (n-1)a^{n-1} & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$\text{mit } \det(D_2) = \begin{vmatrix} a-1 & -1 \\ -1 & a-1 \end{vmatrix} = (a-1)^2 - 1 = a^2 - 2a = a(a-2)$$

$$\det(D_1) = |a-1| = a-1$$

$$\text{Somit gilt } \det(D_n) = \begin{cases} a^{n-2}(a^2 - 2a) - (n-2)a^{n-1} = a^{n-2}(a-2) - (n-2)a^{n-1} & \text{für } n \text{ gerade} \\ a^{n-1}(a-1) - (n-1)a^{n-1} = a^{n-1}(a-1 - (n-1)) = a^{n-1}(a-n) & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Annahme: $T = n$ gerade, $a = T - \lambda$

Dann sind die Nullstellen der $\det(D_n)$ durch $a = T - \lambda = 0$,

also $T = \lambda$, und $\lambda \cdot \lambda = T - \lambda - T = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ gegeben.

Diese sind ≥ 0 also ist die Matrix A und somit auch T positiv semidefinit. (Anmerkung: Ein analoges Ergebnis gilt für T ungerade)

Das Black-Litterman Modell:

1) Berechnung von π anhand des CAPM :
(Capital asset pricing model)

Annahme: Alle Investoren maximieren dieselbe Zielfunktion
Durch entsteht für das Marktgleichgewichtsportfolio x_M :

~~$x_M = \arg \max \{ x' \pi - \frac{\delta}{2} x' \Sigma x \}$~~ , wobei

δ ein Risikoaversionsfaktor ist

Notwendige Bedingung 1. Ordnung: $\pi - \delta \Sigma x_M = 0$
(und hinreichende?) $\Rightarrow \pi = \delta \Sigma x_M$ (*)
Worum?

Berechnung von δ : Multipliziere beide Seiten von (*) mit x_M'
 $x_M' \pi = \delta x_M' \Sigma x_M \Rightarrow \delta = \frac{x_M' \pi}{x_M' \Sigma x_M}$

und somit $\delta = \frac{E(R_M)}{\text{var}(R_M)}$ wobei R_M der Ertrag des
Marktgleichgewichtsportfolios ist.

$x_M, E(R_M), \text{var}(R_M)$ werden aus historischen Daten
geschätzt; somit entsteht ein Schätzer für δ und auch π .

Beispiel (Folgerung des MVO Beis, ist mit 3 Assetklassen
Bonds, Moneymarkt und ...)

Seien 2 Expertenmeinungen vorhanden:

- 1) der Ertrag des Moneymarkt wird in der nächsten Periode 2% betragen (große Zuversicht)
- 2) 10 Year Treasury wird 5% schlechter als S&P 500 performen (keine sehr große Zuversicht)

$\mu_M = 0.02 \quad w_1 = 0.00001$

$\mu_S - \mu_B = 0.05 \quad w_2 = 0.001$

$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad V = \begin{pmatrix} 0.02 \\ 0.05 \end{pmatrix} \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 0.00001 & 0 \\ 0 & 0.001 \end{pmatrix}$

Nun hat man alle Ingredients nur die Formel aus der Theorie anzuwenden.