

Eine weitere Anwendung der quadratischen Optimierung:
Approximation des risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaßes
ausgehend von Optionspreisen. (1)

Problembeschreibung:

- Input: (•) Basiswert XYZ (••) Zeithorizont $\{T_0, T_1\}$,
(...) Eine Menge von Optionen über XYZ , etwa ECO, EPO (Europäische Call/Put Optionen) mit Strike Preisen $P_k^{(C)}, P_k^{(P)}$, $1 \leq k \leq 2n$,
sodass $a := P_1^{(\cdot)} < P_2^{(\cdot)} < \dots < P_{2n}^{(\cdot)} =: b$
(....) Preise der Optionen zum Zeitpunkt T_0 : $C_k^{(P)}, C_k^{(C)}$,
 $1 \leq k \leq 2n$.
(.....) Die möglichen Preise des Underlying XYZ zum
Zeitpunkt T_1 bilden ein Kontinuum $[a, b] =: \Omega$
(.....) Risikoloser Zinssatz über $[T_0, T_1]$ ist r .

Output Ein risikoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß p ,
~~das~~ die die Summe der Fehlerquadrate $\sum_{k=1}^{2n} (C_k^{(\cdot)} - C_k^{(\cdot)}(p))^2$
minimiert, wobei $C_k^{(\cdot)}(p)$, $1 \leq k \leq 2n$, sind die aufgrund
von p errechneten Preise der Optionen zum Zeitpunkt T_0 .

Ansatz p wird durch einen kubischen, natürlichen Spline
 $S: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit Stützpunkten (Knoten)
 $P_k^{(\cdot)}$, $1 \leq k \leq 2n$ (oder eine Übermenge davon),

Für p müssen nun (*) $\int_a^b p(\omega) d\omega = 1$ und (**) $p(\omega) \geq 0 \forall \omega \in \Omega$
gelten.

Für S müssen folgende Bedingungen gelten:

(i) $S(x) = f_i(x) = \alpha_i x^3 + \beta_i x^2 + \gamma_i x + \delta_i$, $\forall x \in [P_i^{(\cdot)}, P_{i+1}^{(\cdot)}]$
für $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i \in \mathbb{R}$ $1 \leq i \leq 2n-1$

(ii) $S_{-}^{(i)}(P_k^{(i)}) = S_{+}^{(i)}(P_k^{(i)}) \quad \forall i \in \{0, 1, 2\}$
 $f_{k+1}^{(i)}(P_k^{(i)}) = f_k^{(i)}(P_k^{(i)}) \quad \forall 2 \leq k \leq 2n-1$

und $S_{+}^{(2)}(P_1^{(i)}) = S_{-}^{(2)}(P_{2n}^{(i)}) = 0$

wobei $S_{-}^{(i)}, S_{+}^{(i)}$ für $i \in \{1, 2\}$ die erste bzw. die zweite linksseitige bzw. rechtsseitige Ableitung von S ist,

und $S_{-}^0(u) := \lim_{x \rightarrow u^-} S(x)$ und $S_{+}^0(u) := \lim_{x \rightarrow u^+} S(x)$

$\forall u \in [a, b]$ (für die diese Grenzwerte definiert sind.)

Der Spline S ist durch das Spezifizieren des Vektors

$y := (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2, \dots, \alpha_{2n-1}, \beta_{2n-1}, \gamma_{2n-1}, \delta_{2n-1}) \in \mathbb{R}^{4(2n-1)}$

eindeutig bestimmt.

Genügt ist nun so ein y , dass (i) und (ii) erfüllt,

aber auch $(*)$, $(**)$, d.h. $\int_a^b p(\omega) d\omega = 1$

$(*)$ $S(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega$ $(**')$ $\int_a^b S(\omega) d\omega = 1$

(x') wird als $(**)$ $S(P_i^{(i)}) = f_i(P_i^{(i)}) \geq 0 \quad \forall 1 \leq i \leq 2n-1$ relaxiert
 und $S(P_{2n}^{(i)}) = f_{2n-1}(P_{2n}^{(i)}) \geq 0$ linear Fkt in y

und $(**')$ lässt sich als $\sum_{i=1}^{2n-1} \int_{P_i^{(i)}}^{P_{i+1}^{(i)}} f_i(x) dx = 1$ $(**'')$
 $(*)$ ist eine Relax. von $(**')$

Schreiben

Weiters soll $\sum_{k=1}^{2n} (C_k^{(i)} - C_k^{(i)}(y))^2$ minimiert werden
 wobei $C_k^{(i)}(y) = \frac{1}{1+\Gamma} \int_a^b \max\{x - P_k^{(i)}, 0\} S(x) dx$ Diskontinuität

und $C_k^{(P)}(y) = \frac{1}{1+\Gamma} \int_a^b \max\{P_k^{(P)} - x, 0\} S(x) dx \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, 2n\}$

Wiederum gilt

$$C_k^{(c)}(y) = \frac{1}{1+r} \sum_{i=1}^{2n-1} \int_{P_i^{(c)}}^{P_{i+1}^{(c)}} \max\{x - P_k^{(c)}, 0\} f_i(x) dx$$
$$= \frac{1}{1+r} \sum_{i=k}^{2n-1} \int_{P_i^{(c)}}^{P_{i+1}^{(c)}} (x - P_k^{(c)}) f_i(x) dx =: l_k^{(c)}(y), \quad (***)$$

wobei $l_k^{(c)}(y)$ eine lineare Funktion in y ist.

Analog $C_k^{(p)}(y) = \frac{1}{1+r} \sum_{i=1}^{2n-1} \int_{P_i^{(p)}}^{P_{i+1}^{(p)}} \max\{P_k^{(p)} - x, 0\} f_i(x) dx$

$$= \frac{1}{1+r} \sum_{i=1}^k \int_{P_i^{(p)}}^{P_{i+1}^{(p)}} (P_k^{(p)} - x) f_i(x) dx =: l_k^{(p)}(y), \quad \text{wobei } (***)$$

auch $l_k^{(p)}(y)$ eine lineare Funktion von y ist.

Die Bestimmung des gewünschten unibiquentralen Wahrscheinlichkeitsmaßes lässt sich also durch folgendes Problem approximativ berechnen:

$$\min \sum_{i=1}^{2k} (C_k^{(i)} - l_k^{(i)}(y))^2$$

u.d.NB $(*)', (**)'$, $(***)$, $(****)$ und (ii)
 $y \in \mathbb{R}^{4(2n-1)}$

wobei alle Restriktionen linear und die Zielfunktion quadratisch in y sind.

Wir beobachten noch, dass die Zielfunktion konvex ist, was die Übereinstimmung lokaler und globaler Minima garantiert.

l linear $\Rightarrow l^2$ konvex $(l^2)' = (2l l')' = 2(l l')' \geq 0$