

Cash flow matching: ein kurzfristiges Finanzierungsmodell

Monat	Jän.	Feb.	Mär.	Apr.	Jun.	Jul.
Netto Geldfluss ¹ (in $\text{€}10^3$)	-150	-100	200	-200	50	300

Finanzierungsinstrumente:

- ▶ Kredit bis $\text{€}10^5$, Laufzeit 1 Monat, Zinssatz 1% am Ende der Laufzeit
- ▶ Emmission von Wertpapieren mit Laufzeit 3 Monate, Zinssatz 2% über die 3 Monate
- ▶ Überschüssiges Geld kann mit einem Zinssatz von 0.3% im Monat investiert werden

Frage: Welche Finanzierungsinstrumente und in welcher Höhe soll das Unternehmen einsetzen um die Verpflichtungen über den 6 monatigen Zeithorizont zu erfüllen, sodass das Endkapital am Ende des Zeithorizonts maximiert wird?

¹Negative Zahlen entsprechen Ausgaben, positive Zahlen entsprechen Einnahmen

Lineares Optimierungsmodell

Entscheidungsvariablen:

x_i : Höhe des Kredits im Monat i , $1 \leq i \leq 5$

y_i : Wert der im Monat i emittierten Wertpapiere, $1 \leq j \leq 3$

z_i : Überschuss am Ende des i -ten Monats, $1 \leq i \leq 5$

v : Überschuss/Vermögen des Unternehmens am Ende des Zeithorizonts

max v

s.t.

$$x_1 + y_1 - z_1 = 150$$

$$x_2 + y_2 - 1.01x_1 + 1.003z_1 - z_2 = 100$$

$$x_3 + y_3 - 1.01x_2 + 1.003z_2 - z_3 = -200$$

$$x_4 - 1.02y_1 - 1.01x_3 + 1.003z_3 - z_4 = 200$$

$$x_5 - 1.02y_2 - 1.01x_4 + 1.003z_4 - z_5 = -50$$

$$-1.02y_3 - 1.01x_5 + 1.003z_5 - v = -300$$

$$0 \leq x_i \leq 100, 1 \leq i \leq 5$$

$$y_i \geq 0, 1 \leq i \leq 3$$

$$z_i \geq 0, 1 \leq i \leq 5$$

$$v \geq 0$$

Lösung und Output der Sensitivitätsanalyse

Basisvariablen	Wert	$LB_i^{(c_B)}$	$UB_i^{(c_B)}$
x_2	50.9803	0	0.0032
x_5	0	-10^{30}	0
y_1	150	-0.0032	0.0040
y_2	49.0196	-0.0032	0
y_3	203.4343	0	0.0071
z_3	351.9441	-0.0032	0.0039
v	92.4969	-1	10^{30}

Nichtbasisvariablen	Wert	Red. Kosten	$LB_i^{(c_N)}$	$UB_i^{(c_N)}$
x_1	0	-0.0032	-10^{30}	0.0032
x_3	0	-0.0071	-10^{30}	0.0071
x_4	0	-0.0032	-10^{30}	0.0032
z_1	0	-0.0040	-10^{30}	0.0040
z_2	0	-0.0071	-10^{30}	0.0071
z_4	0	-0.0039	-10^{30}	0.0039
z_5	0	-0.007	-10^{30}	0.007

Restriktionen (Monate)	$LB_i^{(b)}$	$UB_i^{(b)}$	Schattenpreise
Jän.	-150	89.17	-1.037
Feb.	-50.980	49.020	-1.030
Mär.	-203.434	90.683	-1.020
Apr.	-204.044	90.955	-1.017
Mai	-52	50	-1.010
Jun.	-10^{30}	92.497	-1

Restriktionen (obere Schranken)	$UB_i^{(b)}$	$-LB_i^{(b)}$	Schattenpreise
x_1	10^{30}	100	0
x_2	10^{30}	49.020	0
x_3	10^{30}	100	0
x_4	10^{30}	100	0
x_5	10^{30}	100	0

Zusammenfassung der Ergebnisse der Sensitivitätsanalyse der linearen Optimierung (Maximierungsproblem)

- Veränderung des Kostenkoeffizienten $c_{B(i)}$ der i -ten Basisvariable $x_{B(i)}$:

$$\tilde{C}_B = C_B + \Delta_i \cdot (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^t$$

Die Basis bleibt zulässig und die Basislösung bleibt unverändert. Die Basislösung bleibt optimal, dann und nur dann wenn $\Delta_i \in \left[LB_i^{(C_B)}, UB_i^{(C_B)} \right]$, wobei

$$UB_i^{(C_B)} := \min \left\{ \frac{(\tilde{C}_N)_j}{(\bar{A}_N)_{ij}} : j \in \{1, 2, \dots, n - m\}, (\bar{A}_N)_{i,j} < 0 \right\}$$

$$LB_i^{(C_B)} := \max \left\{ \frac{(\tilde{C}_N)_j}{(\bar{A}_N)_{ij}} : j \in \{1, 2, \dots, n - m\}, (\bar{A}_N)_{i,j} > 0 \right\}$$

und $\bar{A}_N = A_B^{-1} A_N$. Der Zielfunktionswert Z verändert sich: $\tilde{Z} = Z + \Delta_i \cdot (A_B^{-1} b)_i$.

- Veränderung des Kostenkoeffizienten $c_{N(j)}$ der j -ten Nichtbasisvariablen $x_{N(j)}$:

$$\tilde{C}_N = C_N + \Delta_j \cdot (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^t$$

Die Basis bleibt zulässig und die Basislösung bleibt unverändert. Die Basislösung bleibt optimal, dann und nur dann wenn $\Delta_j \leq -\bar{C}_{N(j)}$; $\bar{C}_N$ sind die reduzierten Kostenkoeffizienten mit $\bar{C}_N^t := C_N^t - C_B^t A_B^{-1} A_N$.

Zusammenfassung der Ergebnisse der Sensitivitätsanalyse der linearen Optimierung (Maximierungsproblem)

- Veränderung des Wertes einer Nicht-Basisvariablen $x_{(N(j))}$: $\tilde{X}_N = X_N + \Delta_j \cdot (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^t$

Die Lösung bleibt zulässig dann und nur dann, wenn $0 \leq \Delta_j \leq UB_j^{(X_N)}$ wobei

$$UB_j^{(X_N)} := \min \left\{ \frac{(\bar{b})_i}{(\bar{A}_N)_{ij}} : i \in \{1, 2, \dots, m\}, (\bar{A}_N)_{i,j} > 0 \right\}$$

Der Zielfunktionswert Z verändert sich: $\tilde{Z} = Z + \Delta_j \cdot \bar{C}_{N(j)}$, d.h. die veränderte Lösung ist dann und nur dann optimal, wenn $\bar{C}_{N(j)} = 0$.

- Veränderung des Koeffizienten der rechten Seite b_i in der i -ten Restriktion:

$$\tilde{b}_i = b_i + \Delta_i \cdot (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^t$$

Das Optimalitätskriterium bleibt erfüllt.

Die Basis bleibt dann und nur dann zulässig (und somit auch optimal), wenn $\Delta_i \in [LB_i^{(b)}, UB_i^{(b)}]$, wobei

$$UB_i^{(b)} := \min \left\{ -\frac{(X_B)_j}{(A_B^{-1})_{ji}} : j \in \{1, 2, \dots, m\}, (A_B^{-1})_{ji} < 0 \right\}$$

$$LB_i^{(b)} := \max \left\{ -\frac{(X_B)_j}{(A_B^{-1})_{ji}} : j \in \{1, 2, \dots, m\}, (A_B^{-1})_{ji} > 0 \right\}$$

Die neue Basislösung ist durch $\tilde{X}_B = X_B + A_B^{-1} \cdot (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^t$, $\tilde{X}_N = X_N = \vec{0}$ gegeben.

Der Zielfunktionswert Z verändert sich: $\tilde{Z} = Z + \Delta_i \cdot c_B^t \cdot ((A_B^{-1})_{\cdot, i})$, wobei $((A_B^{-1})_{\cdot, i})$ die i . Spalte der Matrix A_B^{-1} darstellt. Die Größe $c_B^t \cdot ((A_B^{-1})_{\cdot, i})$ heißt **Schattenpreis der i -ten Restriktion**.

Ein weiteres LP-Modell: „dedicated portfolio“

Dieser Ansatz wird verwendet um ein Portfolio zu konstruieren, dessen positiver Kapitalfluss, den Verpflichtungen eines Unternehmens entspricht. So ein Portfolio enthält in der Regel risikolose, endfällige Anleihen (risk-free non-callable bonds) und hat somit kein Zinsrisiko. Das Portfolio bleibt unverändert bis alle Verpflichtungen, die es abdecken sollte, beglichen sind.

Ein Beispiel:

Periode (Jahr) t	1	2	3	4	5	6	7	8
Verpflichtung L_t in $\text{€}10^3$	12	18	20	20	16	18	12	10

Anleihenindex	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Preis p_i (in €)	102	90	101	98	98	104	100	101	102	94
Coupon c_i	5	3.5	5	3.5	4	9	6	8	9	7
Fälligkeit m_i	1	2	2	3	4	5	5	6	7	8

Überschüsse werden nicht investiert, sie verbleiben im Portfolio.

Sei T die Länge des Planungszeitraums, $T = 8$, N die Anzahl der Anleihen, $N = 10$, und z_0 das im Portfolio zu investierende Kapital am Anfang des Planungshorizonts.

Ziel: Aufstellung eines „dedicated portfolio“ mit minimalen Kosten,

Das lineare Optimierungsmodell

Entscheidungsvariablen:

x_i : Höhe des in Anleihe i investierten Kapitals, $1 \leq i \leq N$

z_t : Überschuss am Ende des Jahr t , $1 \leq t \leq T$

$$\min \quad z_0 + \sum_{i=1}^N p_i x_i$$

s.t.

$$\sum_{\substack{i=1: \\ m_i \geq t}}^N c_i x_i + \sum_{\substack{i=1: \\ m_i = t}}^N x_i - z_t + z_{t-1} = L_t \quad \forall 1 \leq t \leq T$$

$$x_i \geq 0, \quad 1 \leq i \leq N$$

$$z_t \geq 0, \quad 1 \leq t \leq T$$

Lösung und Output der Sensitivitätsanalyse

Basisvariablen	Wert	$LB_i^{(CB)}$	$UB_i^{(CB)}$
x_1	62.1361	-5.5909	3
x_3	125.2429	-3.3110	0.8426
x_4	151.5050	-4.7123	3.3741
x_5	156.8077	-17.2316	4.9172
x_6	123.0800	-3.7481	9.0355
x_8	124.1572	-8.6554	3.9888
x_9	104.0898	-0.8605	9.4568
x_{10}	93.4579	-93.4579	0.9000

Nichtbasisvariablen	Wert	Red. Kosten	$LB_i^{(CN)}$	$UB_i^{(CN)}$
x_2	0	0.8386	-0.8386	10^{30}
x_7	0	8.7868	-8.7868	10^{30}
z_0	0	0.0285	-0.0285	10^{30}
z_1	0	0.0557	-0.0557	10^{30}
z_2	0	0.0326	-0.0326	10^{30}
z_3	0	0.0472	-0.0472	10^{30}
z_4	0	0.1793	-0.1793	10^{30}
z_5	0	0.0369	-0.0369	10^{30}
z_6	0	0.0867	-0.0867	10^{30}
z_7	0	0.0084	-0.0084	10^{30}
z_8	0	0.5242	-0.5242	10^{30}

Restriktionen (über die Jahre)	$LB_i^{(b)}$	$UB_i^{(b)}$	Schattenpreise
1	-6524.29	10^{30}	0.9714
2	-13150.50	137010.16	0.9156
3	-15680.77	202579.30	0.8830
4	-16308.00	184347.17	0.8357
5	-13415.72	89305.96	0.6563
6	-13408.98	108506.74	0.6194
7	-11345.79	105130.97	0.5327
8	-10000	144630.19	0.5242