

## Optimierung in der Finanzmathematik SS 2020

### 3. Übungsblatt

17. (Ein Standortproblem)

- a) Betrachten Sie den Fall einer Firma, die Schecks aus  $n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  Geschäftsfilialen bekommt. Die Zeitspanne zwischen der Bezahlung eines Schecks und dessen Verrechnung hängt von der Paarung (Geschäftsfiliale, Verrechnungsstelle) ab. Selbst wenn diese Zeitspanne nur wenige Tage beträgt, so entsteht bei großen Geschäftsvolumina ein zinssatz- oder reinvestitionsbedingter Verlust für die Firma. Wenn zB. von der Geschäftsfiliale A Schecks in Wert von  $B$  in die Verrechnungsstelle C zur Verrechnung geschickt werden und die Zeitspanne zwischen erfolgtem Geschäft und Verrechnung zwei Tage beträgt, dann schreibt die Firma einen Verlust von  $pB$ , wobei  $p$  der tägliche Zinssatz oder die Reinvestitionsrate ist. Die Firma erwägt daher die Eröffnung von Verrechnungsstellen an manchen Geschäftsfilialen (Engl. *lockboxes*), sodass die oben beschriebenen Verluste minimiert werden. Jede Geschäftsfiliale wird nun genau einer Verrechnungsstelle zugeordnet, die alle Schecks aus dieser Geschäftsfiliale bearbeitet. Die zinsbedingten Verluste der Firma bei Zuordnung einer Geschäftsfiliale  $i$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , zu einer Verrechnungsstelle  $j$ ,  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ , hängen somit von dem (täglichen) Durchschnittsvolumen  $V_i$  der Schecks aus der Geschäftsfiliale  $i$ , der Zeitspanne  $T_{ij}$  zwischen Einzahlung eines Schecks in Filiale  $i$  und Verrechnung des Schecks in Rechnungsstelle  $j$ , und dem (täglichen) Zinssatz  $p$ . Weiters ist zu berücksichtigen, dass die Eröffnung einer Verrechnungsstelle in Geschäftsfiliale  $j$ , mit fixen Investitionskosten  $f_j$  einhergeht,  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Es wird angenommen, dass die Volumina  $V_i$ , die Zeitspannen  $T_{ij}$  zwischen Einzahlung eines Schecks in Filiale  $i$  und Verrechnung des Schecks in Rechnungsstelle  $j$  für alle Paare  $i, j = 1, 2, \dots, n$  bekannt sind. Auch die Reinvestitionsrate  $p$  sei bekannt. Formulieren Sie dieses Problem als (gemischt)-ganzzahliges lineares Optimierungsproblem (GLOP).
- (b) Betrachten Sie eine Variante des Problems in dem es keine fixen Eröffnungskosten für die Verrechnungsstellen gibt, sondern nur Kosten für Zuordnung der Geschäftsfilialen zu den Verrechnungsstellen: seien  $\alpha_{ij}$  die Zuordnungskosten der Geschäftsfiliale  $i$  zur Verrechnungsstelle  $j$ , für alle Filialen  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , und für alle möglichen Verrechnungsstellen  $j$ ,  $1 \leq j \leq n$ . Es wird angenommen, dass in den Koeffizienten  $\alpha_{ij}$  alle anderen Kosten eingepreist sind (zB. Zinssätze, Anzahl der zu bearbeitenden Checks in den Filialen, Sendezeiten u.s.w.). Es wird angenommen, dass genau  $q$  Verrechnungsstellen betrieben werden sollen, für ein gegebenes  $q$  mit  $1 \leq q \leq n$ . Formulieren Sie ein ganzzahliges lineares Optimierungsproblem (GLOP) um die optimalen zu betreibenden Verrechnungsstellen zu bestimmen, sodass die Gesamtkosten der Zuordnung jeder Geschäftsfiliale zu einer in Betrieb genommenen Verrechnungstelle minimiert werden.
- (c) Geben Sie zwei Alternativen (i) und (ii) für die Formulierung folgender Restriktion an: Die Geschäftsfilialen können Schecks nur zu betriebsbereiten Verrechnungsstellen senden. Alternative (i) verwendet  $n^2$  Ungleichungen zur Modellierung der obigen Restriktion, während Alternative (ii)  $n$  Ungleichungen dazu verwendet.
- (d) Lösen und vergleichen sie die LP-Relaxationen der zwei oben genannten Formulierungen des Problems aus (b) für  $q = 2$  und

$$A = (\alpha_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 & 8 & 2 \\ 4 & 0 & 3 & 4 & 6 \\ 5 & 3 & 0 & 1 & 7 \\ 8 & 4 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 6 & 7 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (e) Betrachten Sie das GLOP, das der Alternative (i) entspricht (siehe Punkt (c)), mit dem Input aus Punkt (d). Relaxieren Sie mit Hilfe von Lagrange Multiplikatoren  $u \in \mathbb{R}^5$  jene Ungleichungen, die der Zuordnung einer Geschäftsfiliale an genau einer Verrechnungsstelle entsprechen.

Sei  $L(u)$  der optimale Zielfunktionswert dieser Lagrange Relaxation mit einem festen Satz von Lagrange Multiplikatoren  $u \in \mathbb{R}^5$ . Betrachten Sie  $u^{(1)} = (1, 1, 1, 1, 1)^t$  und  $u^{(2)} = (6, 5, 1, 1, 1)^t$  und berechnen Sie  $L(u^{(1)})$ ,  $L(u^{(2)})$  mit Hilfe eines Greedy Ansatzes (siehe die in der Vorlesung besprochene Heuristik zur Konstruktion eines Index Fonds).

18. Betrachten Sie das untenstehende binäre lineare Problem (ILP)

$$\begin{aligned} \max & && 8x_1 + 11x_2 + 6x_3 + 4x_4 \\ \text{udNb} & && \\ & && 6.7x_1 + 10x_2 + 5.5x_3 + 3.4x_4 \leq 19 \\ & && 8x_1 + 3x_2 \leq 19 \\ & && x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

Lösen Sie dieses Problem mit Hilfe eines *Branch and Bound* Ansatzes und vergleichen Sie die Anzahl der Knoten im *Branch-and-Bound*-Baum mit dem folgenden „brute force“ Enumerationsverfahren: betrachte jede der  $2^4$  Vektoren aus  $\{0, 1\}^4$  und wähle daraus eine zulässige Lösung mit dem optimalen Zielfunktionswert.

19. Betrachten Sie folgendes gemischt-ganzzahliges lineares Problem (GGIP):

$$\begin{aligned} \max & && 10x_1 + 13x_2 \\ \text{udNb} & && \\ & && 10x_1 + 14x_2 \leq 43 \\ & && x_1, x_2 \geq 0 \\ & && x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

(a) Führen Sie eine Schlupfvariable ein und lösen Sie das Problem mit dem Simplexverfahren. Sie sollten ein optimales Tableau der Form

$$\begin{aligned} \max & && x_2 + x_3 \\ \text{udNb} & && \\ & && x_1 + 1.4x_2 + 0.1x_3 = 4.3 \\ & && x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

und die Basislösung  $x_1 = 4.3$ ,  $x_2 = x_3 = 0$  erhalten.

- (b) Erzeugen Sie einen Gomory Schnitt  $g$ , der diese Lösung abschneidet.
- (c) Multiplizieren Sie beide Seiten der Restriktion aus dem Tableau in (a) mit einer Konstanten  $k$ , erzeugen Sie die entsprechenden Gomory Schnitte  $g_i$  für  $k \in \{2, 3, 4, 5\}$  und vergleichen diese Schnitte.
- (d) Fügen Sie den Schnitt  $g_3$  der linearen Relaxation des GGIP hinzu und lösen Sie das entstandene lineare Problem. Was fällt auf?

20. Betrachten Sie folgendes Budgetierungsproblem. Eine Managerin verfügt über 4 Millionen Euro, die sie in 3 unterschiedlichen Projekten in drei unterschiedlichen Regionen investieren kann. Für jede Region  $i$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ , sind die in Region  $i$  durchführbaren Projekte sowie die dazugehörigen Kostenkoeffizienten  $c^{(i)} \in \mathbb{R}^3$  und Nutzenkoeffizienten  $p^{(i)} \in \mathbb{R}^3$  bekannt. Diese Daten (in Millionen Euro) werden in der untenstehenden Tabelle zusammengefasst.

	Region 1		Region 2		Region 3	
Projekt	$c^{(1)}$	$p^{(1)}$	$c^{(2)}$	$p^{(2)}$	$c^{(3)}$	$p^{(3)}$
1	1	2	1	3	1	2
2	2	4	3	9	2	5
3	4	10	-	-	-	-

Die Managerin möchte höchstens 1 Projekt pro Region finanzieren. Ihr Ziel ist die Bestimmung eines Investitionsplan (d.h. die Entscheidung welches Projekt in welcher Regionen finanziert werden soll), sodass der Gesamtnutzen maximiert wird.

- (a) Formulieren Sie dieses Problem als dynamisches Optimierungsproblem mit 4 Stufen  $i$ ,  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ . Die ersten 3 Stufen entsprechen den sequentiellen Entscheidungen über die Investition in der jeweiligen Region  $i$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Die letzte Stufe  $i = 4$  ist ein Artefakt zur Modellierung des Endzustandes. In dieser Stufe wird keine Entscheidung getroffen. Der Zustand  $s_i$  in Stufe  $i$  entspricht dem noch vorhandenen Kapital (bevor in Stufe  $i$  ggf. eine Entscheidung gefallen ist). Es gilt also  $s_1 = 4$ . Geben Sie für jede Stufe  $i \in \{1, 2, 3\}$  und jeden in dieser Stufe möglichen Zustand  $j$  die Menge der zulässigen Entscheidungen  $A(i, j)$ . Geben Sie weiters die Kosten  $c_i(j, a)$  sowie das Evolutionsgesetz (auch Übergangsfunktion genannt)  $f_i(j, a)$ , wobei  $i \in \{1, 2, 3\}$ ,  $j$  ein zulässiger Zustand in Stufe  $i$  ist und  $a \in A(i, j)$ .

Alle oben genannten Größen können auch mit Hilfe eines gerichteten Graphen visualisiert werden. Die Knoten des Graphen entsprechen Paaren  $(i, j)$ , bestehend aus einer Stufe  $i$  und einem in Stufe  $i$  zulässigen Zustand  $j$ . Die Kanten des Graphen entsprechen den Übergängen von einer Stufe zur anderen, die durch zulässige Entscheidungen bewirkt werden.

- (b) Sei  $v(i, j)$  der maximale Gesamtnutzen, der mit zulässigen Entscheidungen in den Stufen  $i, i + 1, \dots, 3$ , ausgehend vom zulässigen Zustand  $j$  in Stufe  $i$ , erzielt werden kann. Geben Sie die Bellman'sche Gleichung zur rekursiven Berechnung von  $v(1, 4)$  an.
- (c) Wenden Sie die Bellman'sche Gleichung zur Bestimmung eines optimalen Investitionsplans mit Hilfe einer Rückwärtsrechnung unter Berücksichtigung der sogenannten Randbedingungen  $v(3, 0) = 0$ ,  $v(3, 1) = 2$ ,  $v(3, 2) = 5$ ,  $v(3, 3) = 5$  und  $v(3, 4) = 5$ . (Warum gelten diese Randbedingungen?)

21. Betrachten Sie eine Variation des optimalen Konsumationsproblems (vgl. Vorlesung) in dem das nicht konsumierte Kapital  $W_t - C_t$ ,  $C_t \in [0, W_t]$ ,  $t \in \overline{0, T-1}$ , sowohl in Staatsanleihen als auch in einem Index Fonds (IF) investiert werden kann. Sei  $x_t \in (0, 1)$  der Anteil des Kapital  $W_t - C_t$ , der in IF investiert wird. Sei  $r > 0$  der risikolose jährliche Ertrag der Staatsanleihen (eine Periode entspricht einem Jahr). Der Ertrag des Index Fonds im Jahr  $t$  ist eine Zufallsgröße  $r_t$  mit Erwartungswert  $E(r_t) =: \mu > r$  und Varianz  $\text{var}(r_t) =: \sigma^2 > 0$ . Es wird angenommen, dass  $r_t$ ,  $t \in \overline{0, T}$  identisch verteilt und unabhängig sind (i.i.d.). Das Ziel ist nun die Bestimmung von  $C_t$  und  $x_t$ ,  $t \in \overline{0, T-1}$ , sodass der erwartete Gesamtnutzen  $E[\sum_{t=0}^T U(C_t)]$  maximiert wird.

- (a) Formulieren Sie dieses Problems als stochastisches endliches dynamisches Optimierungsproblem in dem Sie die Stufen, die Zustände, das Evolutionsgesetz, die Entscheidungen und die stufen-spezifischen Zielfunktionen spezifizieren.
- (b) Geben Sie die Bellman'sche Gleichung für die Funktion  $J_t(W_t)$ ,  $t \in \overline{0, T-1}$ , an (vgl. Vorlesung).