

# Kombinatorik

Vorlesung von Clemens Heuberger und Helmut Prodinger,  
im WS 2011/12: Christian Elsholtz

Vorlesungsmitschrift verfasst von Maria Eichlseder im WS 2010/11. Version 24. Januar 2013.  
Fehlerfunde bitte melden an [maria.eichlseder@student.tugraz.at](mailto:maria.eichlseder@student.tugraz.at).

P.S. Während des Wintersemesters 2012/13 bitte Fehler auch an  
[clemens.heuberger@tugraz.at](mailto:clemens.heuberger@tugraz.at) melden.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Elementares</b>	<b>1</b>
1.1	Permutationsstatistiken . . . . .	1
1.2	Stirling-Zyklen-Zahlen . . . . .	2
1.3	$q$ -Analoge . . . . .	7
1.4	Stirling-Partitions-Zahlen . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Siebmethoden</b>	<b>11</b>
2.1	Möbius-Inversion . . . . .	11
2.2	Involutionsprinzip . . . . .	24
2.3	Gessel-Viennot-Lindström-Lemma . . . . .	27
<b>3</b>	<b>Enumeration von Mustern</b>	<b>31</b>
3.1	Symmetrien und Muster . . . . .	31
3.2	Pólya-Counting . . . . .	34
<b>4</b>	<b>Ramsey-Theorie</b>	<b>39</b>
4.1	Fundamentale Ramsey-Sätze . . . . .	39
4.2	Ramsey-Theorie in $\mathbb{N}$ . . . . .	42
<b>5</b>	<b>Probabilistische Methode — Zufallsgraphen</b>	<b>47</b>
5.1	Einführung und einfaches Beispiel . . . . .	47
5.2	Methode des ersten Moments . . . . .	48
5.3	Eigenschaften fast aller Graphen . . . . .	52
5.4	Methode des zweiten Moments und Schwellenfunktionen . . . . .	54
<b>6</b>	<b>Transformationsformeln</b>	<b>59</b>
6.1	Inversionen von Permutationen . . . . .	59
6.2	$q$ -Reihen . . . . .	60
6.3	Heines Transformationsformeln . . . . .	61
6.4	Partitionen . . . . .	62
6.5	Jacobis Tripelprodukt . . . . .	64
6.6	Franklins Beweis des Pentagonalsatzes . . . . .	66
6.7	Partitionen mit Restriktionen . . . . .	68
6.8	Gauß-Polynome, $q$ -Binomialkoeffizienten . . . . .	69
6.9	Kombinatorische Beweise für Jacobis Tripelprodukt . . . . .	71
6.10	Gitterpfade und $q$ -Binomialkoeffizienten . . . . .	75
<b>7</b>	<b>Lagrange-Formeln</b>	<b>79</b>
7.1	Lagrange-Inversions-Formel . . . . .	79

7.2	Lagrange-Bürmann-Formel . . . . .	82
7.3	Planare Bäume und Narayana-Zahlen . . . . .	84
<b>8</b>	<b>Kernel-Methode</b>	<b>87</b>
8.1	Beispiel Gitterpfade . . . . .	87
8.2	Beispiel Bin Packing . . . . .	89
8.3	Beispiel Banachs Streichholzsachtel-Problem . . . . .	90
<b>9</b>	<b>Folgen von Binomialtyp, Operatorkalkül</b>	<b>91</b>
9.1	Polynomfamilien-Typen . . . . .	91
9.2	Operatoren . . . . .	92
<b>10</b>	<b>Bernoullizahlen und Polynome</b>	<b>101</b>
10.1	Reihenentwicklungen für Winkelfunktionen . . . . .	101
10.2	Bernoulli-Polynome . . . . .	102
10.3	Alternierende Permutationen . . . . .	103
<b>11</b>	<b>Hypergeometrische Funktionen</b>	<b>105</b>
11.1	Definition und Beispiele . . . . .	105
11.2	Die hypergeometrische Differentialgleichung . . . . .	107

# Kapitel 1

## Elementares

### 1.1 Permutationsstatistiken

**Notation:** Bezeichne  $S_n$  die Menge der Permutationen von  $n$  Elementen,

$$S_n = \{\pi : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\} \mid \pi \text{ bijektiv}\},$$

und  $[k; \ell]$  das ganzzahlige Intervall

$$[k; \ell] = \{k, k + 1, \dots, \ell\}, \quad k \leq \ell, \quad k, \ell \in \mathbb{Z},$$

sowie

$$[n] = [1; n] = \{1, \dots, n\}.$$

**Notation:** Schreibweisen für Permutationen:

- Zuordnungsvorschrift:

$$\pi : \quad 1 \rightarrow 4, \quad 2 \rightarrow 3, \quad 3 \rightarrow 1, \quad 4 \rightarrow 5, \quad 5 \rightarrow 2$$

- Darstellung als Wort:

$$43152$$

- Zyklendarstellung:

$$(14523)$$

Freiheiten in der Zyklendarstellung:

$$(142)(35)(6) = (6)(53)(421) = (\underline{421})(\underline{53})(\underline{6})$$

Letzteres ist die “Standard-Zyklen-Darstellung”: pro Zyklus steht das größte Element an erster Stelle, und die Zyklen sind aufsteigend nach diesem ersten Element sortiert.

Die Klammern sind (formal) überflüssig, es ist eindeutig  $421536 = (421)(53)(6)$  (da  $5 > 4$ ,  $6 > 5$ ). 4, 5 und 6 sind hier die “links-nach-rechts-Maxima”.

Ein Wort mit lauter verschiedenen Ziffern kann also Wortdarstellung oder auch Standard-Zyklen-Darstellung sein, Bijektion!

**Definition 1.1** (Zyklentyp): Der *Zyklentyp*  $(c_1, \dots, c_n)$  einer Permutation  $\pi$ :  $c_j$  ist die Anzahl der  $j$ -Zyklen in der Zyklendarstellung von  $\pi$ .

*Beispiel:*  $(421)(53)(6)$  hat den Zyklentyp  $(1, 1, 1, 0, 0, 0)$ .

**Proposition 1.1** (Permutationen eines Zyklentyps): Sei  $(c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{N}_0^n$  ein fester Zyklentyp. Die Anzahl der Permutationen  $\pi \in S_n$  von diesem gegebenen Zyklentyp ist

$$\frac{n!}{1^{c_1} \cdot c_1! \cdot 2^{c_2} \cdot c_2! \cdot \dots \cdot n^{c_n} \cdot c_n!}$$

*Beweis:* Fixiere die Klammern für die Zyklen. Es gibt  $n!$  Möglichkeiten, die Zahlen  $1, \dots, n$  auf die freien Positionen zu verteilen. Dabei entstehen manche Permutationen mehrfach:

- Vertauschen von Zyklen gleicher Länge egal,

$$c_1! \cdot c_2! \cdot \dots \cdot c_n!$$

- Zyklische Permutation innerhalb eines  $k$ -Zyklus,  $k$  Möglichkeiten pro  $k$ -Zyklus, also insgesamt

$$1^{c_1} \cdot 2^{c_2} \cdot \dots \cdot n^{c_n}. \quad \square$$

## 1.2 Stirling-Zyklen-Zahlen

**Definition 1.2** (Stirling-Zyklen-Zahl): Die Anzahl der Permutationen  $\pi \in S_n$  mit genau  $k$  Zyklen nennen wir *Stirling-Zyklen-Zahl*. Dies ist (je nach Definition bis auf Vorzeichen) das gleiche, was auch als *Stirling-Zahl erster Art* bezeichnet wird, allerdings vermeiden wir den Begriff, zur Vermeidung von Unklarheiten. Die Literatur verwendet oft auch  $s_{n,k}$  und  $c_{n,k}$  als Notation, mit  $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = (-1)^{n-k} c_{n,k}$ .

Die Notation verwenden wir nach Knuth<sup>1</sup> als

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}.$$

**Proposition 1.2** (Rekursion für Stirling-Zyklen-Zahlen): Es ist

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ k \end{bmatrix} = 0 \text{ für } k > 0, \quad \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \text{ für } n > 0$$

und allgemein

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + (n-1) \cdot \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}.$$

*Beweis:* Möglichkeiten, in welchem Zyklus  $n$  auftaucht:

- $n$  in eigenem 1-Zyklus, dafür gibt es

$$\begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}$$

Möglichkeiten ( $n-1$  Zahlen auf  $k-1$  Zyklen).

---

<sup>1</sup>Donald Knuth, Two Notes on Notation. <http://arxiv.org/abs/math/9205211>

- baue  $n$  in einen bestehenden Zyklus ein, und zwar so, dass die ersten Elemente der Zyklen gleich bleiben. Dann gibt es bei  $n - 1$  anderen Elementen  $n - 1$  Einfügepositionen, also insgesamt

$$(n - 1) \cdot \begin{bmatrix} n - 1 \\ k \end{bmatrix}$$

Möglichkeiten. □

*Beispiel:* Die ersten Stirlingzahlen:

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6
0	1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0
2	0	1	1	0	0	0	0
3	0	2	3	1	0	0	0
4	0	6	11	6	1	0	0

**Proposition 1.3:** Es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k = x \cdot (x + 1) \cdot (x + 2) \cdots (x + n - 1) =: x^{\overline{n}}.$$

Dabei wird  $x^{\overline{n}}$  als *steigende Faktorielle* bezeichnet.

Es folgen drei Beweise dieser Proposition.

*Beweis* (Induktion mittels Rekursionsformel): Setze

$$F_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k,$$

$F_n(x)$  ist also die erzeugende Funktion der Stirling-Zahlen für fixes  $n$ .

- Basis  $n = 0$ :  $1 = 1 \checkmark$ .
- Schritt  $n - 1 \rightarrow n$ :

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k = \sum_{k=1}^{\infty} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left( \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + (n-1) \cdot \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} \right) x^k \\ &= x \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} x^{k-1} + (n-1) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} x^k \\ &= x \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} x^k + (n-1) \cdot F_{n-1}(x) \end{aligned}$$

Variablentransformation  $k \rightarrow k - 1$  in erster Summe

Term  $k = 0$  in zweiter Summe immer 0, auch für  $n = 1$  wegen  $n - 1$ .

$$= x \cdot F_{n-1}(x) + (n-1) \cdot F_{n-1}(x) = F_{n-1}(x) \cdot (x + n - 1)$$

$$= x^{\overline{n-1}} \cdot (x + n - 1) = x \cdots (x + n - 2)(x + n - 1) = x^{\overline{n}}. \quad \square$$

*Beweis* (Koeffizientenbestimmung, Bijektion): Wir versuchen, die Koeffizienten von  $x$  auf der rechten Seite,  $[x^k] \dots$ , kombinatorisch zu beschreiben und anschließend eine Bijektion zur Permutation aufzustellen.

Von der Klammer, deren Indizes in  $T$  enthalten sind, nehme nicht  $x$ , sondern den anderen Summanden:

$$[x^k]x \cdot (x+1) \cdots (x+n-1) = \sum_{\substack{T \subseteq [n-1] \\ |T|=n-k}} \prod_{j \in T} j.$$

Diese Summe ist die Anzahl der Paare  $(T, f)$ , mit einer Abbildung  $f: T \rightarrow \mathbb{N}$  mit  $f(x) \leq x$  für alle  $x$ .

*Beispiel:* Sei  $T = \{2, 3, 5\}$ . Dann  $f(2) \in \{1, 2\}$  (2 Möglichkeiten),  $f(3) \in \{1, 2, 3\}$  (3 Möglichkeiten) und  $f(5) \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$  (5 Möglichkeiten), also  $2 \cdot 3 \cdot 5$  Möglichkeiten für  $f$ .

Wir beschreiben eine Bijektion von der Menge

$$\{(T, f) : T \subseteq [n-1], |T| = n-k, f: T \rightarrow \mathbb{N}, \forall j \in T : f(j) \leq j\}$$

in die Menge

$$\{\pi \in S_n \mid \pi \text{ hat } k \text{ Zyklen}\}.$$

Sei  $(T, f)$  gegeben. Seien  $1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_{n-k} \leq n-1$  die Elemente von  $T$ .

Wir setzen  $b_j = n - a_j$  ("Kunst"). Es gilt also  $n-1 \geq b_1 > b_2 > \dots > b_{n-k} \geq 1$ . Sei  $1 \leq c_1 < c_2 < \dots < c_k \leq n$  so gewählt, dass  $\{c_1, \dots, c_k, b_1, \dots, b_{n-k}\} = [n]$  (also die anderen Zahlen).

Wir bauen eine Permutation wie folgt. Jedes  $c_j$  beginnt einen der  $k$  Zyklen. Positioniere die  $b_1, b_2, \dots, b_{n-k}$  so, dass  $f(a_j)$  Zahlen größer als  $b_j$  links von  $b_j$  stehen.

*Beispiel:*  $n = 9, k = 4$ , und sei

$$T = \{1, 3, 4, 6, 8\}, \quad f(1) = 1, \quad f(3) = 2, \quad f(4) = 1, \quad f(6) = 3, \quad f(8) = 6.$$

Also haben wir

$$\begin{array}{cccccc} a_1 = 1 & a_2 = 3 & a_3 = 4 & a_4 = 6 & a_5 = 8, \\ b_1 = 8 & b_2 = 6 & b_3 = 5 & b_4 = 3 & b_5 = 1. \end{array}$$

Es fehlen folglich

$$c_1 = 2 \quad c_2 = 4 \quad c_3 = 7 \quad c_4 = 9.$$

Baue die Zyklen:

$$(2\dots)(4\dots)(7\dots)(9\dots)$$

- $f(a_1) = 1$ , also ein Element größer als  $b_1 = 8$  links von 8. Also muss 8 rechts von 9 sein.
- $f(a_2) = 2$ , zwei Elemente größer als  $b_2 = 6$  links von 6. In Frage kommen 7, 9, 8, also muss 6 zwischen 9 und 8 liegen.
- $f(a_3) = 1$ , also ein Element größer als  $b_3 = 5$  links von 5. Das sind 7, 9, 6, 8, also kommt 5 zwischen 7 und 9.
- $f(a_4) = 3$ , also 3 nach 5.
- $f(a_5) = 6$ , also 1 nach 9.

Damit haben wir insgesamt die Permutation

$$(2)(4)(753)(9168)$$

Die Permutation ist in Standard-Zyklen-Darstellung mit  $k = 4$ .

Das funktioniert allgemein:  $f(a_j) \leq a_j$ . Alle  $n - b_j = a_j$  Zahlen größer als  $b_j$  wurden vor  $b_j$  eingefügt, somit kann man immer passend einfügen. Da  $f(a_j) \geq 1$ , beginnt  $b_j$  nie einen neuen Zyklus. Damit liegt eine Bijektion vor: die Umkehrung identifiziert die  $c_j$  als die Links-Rechts-Maxima, die  $b_j$  sind die übrigen Zahlen und die  $a_j$  ergeben sich daraus. Die Funktionswerte  $f(a_j)$  bestimmen sich als die Anzahl der Elemente größer als  $b_j$  links von  $b_j$  (diese ändert sich bei der Konstruktion nie, weil nach  $b_j$  nur mehr Zahlen kleiner als  $b_j$  eingefügt werden).  $\square$

*Beweis* (Polynommethode): Zu zeigen ist

$$\sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} x^k = x^{\bar{n}} = x \cdot (x + 1) \cdots (x + n - 1).$$

Tatsächlich handelt es sich dabei um eine endliche Summe, da

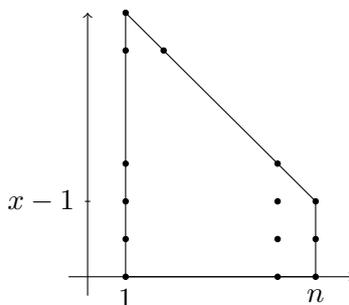
$$\forall k > n : \binom{n}{k} = 0.$$

Um zu zeigen, dass die Polynome gleich sind, ist es hinreichend, zu zeigen, dass die Auswertung in hinreichend vielen Werten von  $x$  gleich ist (oder für alle  $x \in \mathbb{N}$ ).

Linke Seite:

$$\sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} x^k = \sum_{\pi \in S_n} x^{\#\text{Zyklen von } \pi}$$

Wir zählen Paare  $(\pi, f)$  mit  $f : \text{Zyklen von } \pi \rightarrow [x]$ .



Die Anzahl der Tupel  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n \cap \text{Polygon}$  ist  $x \cdot (x + 1) \cdots (x + n - 1)$ .

Wir konstruieren eine Abbildung von diesen Tupeln auf die Menge der Paare  $\{(\pi, f) \text{ wie oben}\}$ . Weiters wird das Polygon in ein Dreieck und ein Rechteck zerlegt, die Werte von  $i$  werden verringert:

- Falls  $a_i$  im Rechteck liegt, beginne einen neuen Zyklus mit  $i$ . Als Funktionswert dieses Zyklus wird  $a_i$  gesetzt.
- Andernfalls setze  $a_i = x - 1 + k$ , wobei  $1 \leq k \leq n - i$ .

Platziere  $i$  so, dass genau  $k$  Zahlen größer als  $i$  links von  $i$  sind. Folglich ist  $i$  kein Links-nach-rechts-Maximum, daher wird kein neuer Zyklus (in der Standard-Zyklen-Darstellung) eröffnet. Das ist eine Bijektion.  $\square$

*Beispiel:*  $n = 9, x = 4, (a_1, \dots, a_n) = (4, 8, 5, 0, 7, 5, 2, 4, 1)$ .

- $n = 9: a_9 = 1 \in \text{Rechteck}, (9), \text{Zyklus } 2$
- $n - 1 = 8: a_8 = 4 \notin \text{Rechteck}, k = 1, \text{ also } (98), \text{Zyklus } 2$
- $n - 2 = 7: a_7 = 2 \in \text{Rechteck}, (7)(98), \text{Zyklen } 3, 2$
- $n - 3 = 6: a_6 = 5 \notin \text{Rechteck}, (7)(968), \text{Zyklen } 3, 2$
- $n - 4 = 5: a_5 = 7 \notin \text{Rechteck}, (7)(9685), \text{Zyklen } 3, 2$
- $n - 5 = 4: a_4 = 0 \in \text{Rechteck}, (4)(7)(9685), \text{Zyklen } 1, 3, 2$
- $n - 6 = 3: a_3 = 5 \notin \text{Rechteck}, (4)(73)(9685), \text{Zyklen } 1, 3, 2$
- $n - 7 = 2: a_2 = 8 \notin \text{Rechteck}, (4)(73)(96285), \text{Zyklen } 1, 3, 2$
- $n - 8 = 1: a_1 = 4 \notin \text{Rechteck}, (41)(73)(96285), \text{Zyklen } 1, 3, 2$
- $f(41) = a_4 + 1 = 1, f(73) = a_7 + 1 = 3, f(96285) = a_9 + 1 = 2,$
- ...

Insgesamt erhält man  $(41)(73)(96285), \text{Zyklen } 1, 3, 2$ .

Spezialfall  $x = 1$ : Wir erhalten eine Bijektion zwischen den Permutationen von  $S_n$  bzw.

$$[0, n - 1] \times [0, n - 2] \times \dots \times [0, 1] \times [0, 0].$$

Die Anzahl der Zyklen ist dann die Anzahl der Nullen im Tupel.

Daraus ergibt sich eine andere Interpretation der Stirling-Zahlen:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \#n\text{-Tupel in } [0, n - 1] \times [0, n - 2] \times \dots \times [0, 0] \text{ mit } k \text{ Nullen.}$$

**Definition 1.3** (Inversion): Sei  $\pi = a_1 \dots a_n \in S_n$  in Wortdarstellung. Falls  $a_i < a_j$  für  $i < j$ , dann heißt das Paar  $(i, j)$  *Inversion*. Mit  $i(\pi)$  wird die Anzahl der Inversionen (Fehlstellungen) bezeichnet.

Wir benötigen eine weitere Bijektion zwischen  $S_n$  (in Wortdarstellung) und  $[0, n - 1] \times \dots \times [0, 0]$  unter Verwendung der Anzahl der Inversionen.

Für  $(a_1, \dots, a_n)$ , wähle eine Permutation  $\pi$  so, dass  $a_i$  die Anzahl der Zahlen größer  $i$  links von  $i$  in der Wortdarstellung von  $\pi$  ist (Inversionen, in denen  $i$  das kleinere Element ist).

*Beispiel:*  $n = 9, (a_1, \dots, a_n) = (1, 5, 2, 0, 4, 2, 0, 1, 0)$ . Das ergibt 417396285.

**Lemma 1.4** (Erzeugende Funktion für Fehlstellungen): Es gilt

$$\sum_{k \geq 0} |\{\pi \in S_n : i(\pi) = k\}| q^k = \sum_{\pi \in S_n} q^{i(\pi)} = [n]_q!,$$

wobei

$$[k]_q := 1 + q + \dots + q^{k-1} = \frac{q^k - 1}{q - 1}$$

und

$$[n]_q! := [n]_q \cdot [n - 1]_q \cdots [1]_q.$$

*Beweis:* Aufgrund obiger Bijektion ist

$$\begin{aligned}
\sum_{\pi \in S_n} q^{i(\pi)} &= \sum_{\substack{(a_1, \dots, a_n) \in \\ [0, n-1] \times \dots \times [0, 0]}} q^{a_1 + a_2 + \dots + a_n} \\
&= \left( \sum_{a_1=0}^{n-1} q^{a_1} \right) \cdot \left( \sum_{a_2=0}^{n-2} q^{a_2} \right) \cdots \left( \sum_{a_{n-1}=0}^1 q^{a_{n-1}} \right) \cdot \left( \sum_{a_n=0}^0 q^{a_n} \right) \\
&= (1 + q + \dots + q^{n-1}) \cdot (1 + q + \dots + q^{n-2}) \cdots (1 + q) \cdot 1 \\
&= [n]_q \cdot [n-1]_q \cdots [2]_q \cdot [1]_q = [n]_q! \quad \square
\end{aligned}$$

### 1.3 $q$ -Analoga

**Notation:** Wir schreiben

$$\begin{aligned}
[k]_q &:= 1 + q + \dots + q^{k-1} = \frac{q^k - 1}{q - 1}, \\
[n]_q! &:= [n]_q \cdot [n-1]_q \cdots [1]_q, \\
\binom{n}{k}_q &:= \frac{[n]_q!}{[k]_q! [n-k]_q!}.
\end{aligned}$$

Für  $q \rightarrow 1$  gilt

$$\begin{aligned}
[k]_q &\rightarrow k, \\
[n]_q! &\rightarrow n!, \\
\binom{n}{k}_q &\rightarrow \binom{n}{k}.
\end{aligned}$$

**Proposition 1.5:** Sei  $\mathbb{F}_q$  ein endlicher Körper. Dann ist die Anzahl der  $k$ -dimensionalen Unterräume des Vektorraums  $\mathbb{F}_q^n$  gleich  $\binom{n}{k}_q$ .

*Beweis* (Doppelzählung): Es sei

$$N(n, k) = |\{(v_1, \dots, v_k) \mid v_1, \dots, v_k \text{ linear unabhängig} \in \mathbb{F}_q^n\}|.$$

Dabei ist

$$\begin{aligned}
N(n, 0) &= 1, \\
N(n, 1) &= q^n - 1, \\
N(n, 2) &= (q^n - 1)(q^n - q), \\
&\vdots \\
N(n, k) &= (q^n - 1) \cdot (q^n - q) \cdot (q^n - q^2) \cdots (q^n - q^{k-1}).
\end{aligned}$$

Sei nun  $W$  ein Unterraum der Dimension  $k$  von  $\mathbb{F}_q^n$ . Wir zählen die geordneten Basen von  $W$  ( $W \simeq \mathbb{F}_q^k$  nach Wahl einer fixen Basis).

- Möglichkeiten für  $v_1$ : alle Elemente von  $W$  außer dem Nullvektor, also  $q^k - 1$ .

- Möglichkeiten für  $v_2$ : alle Elemente außer Vielfachen von  $v_1$ , also  $q^k - q$
- ...
- Möglichkeiten für  $v_k$ : alle Elemente außer Linearkombinationen von  $v_1, \dots, v_{k-1}$ , also  $q^k - q^{k-1}$ .

Weiters

$$N(n, k) = |\{V \subseteq \mathbb{F}_q^n \mid \dim V = k\}| \cdot (q^k - 1) \cdot (q^k - q) \cdots (q^k - q^{k-1}).$$

Daher ist die Anzahl der Unterräume von Dimension  $k$  gleich

$$\begin{aligned} |\{V \subseteq \mathbb{F}_q^n \mid \dim V = k\}| &= \frac{(q^n - 1) \cdot (q^n - q) \cdots (q^n - q^{k-1})}{(q^k - 1) \cdot (q^k - q) \cdots (q^k - q^{k-1})} \\ &= \prod_{j=0}^{k-1} \frac{q^n - q^j}{q^k - q^j} = \prod_{j=0}^{k-1} \frac{q^j \cdot (q^{n-j} - 1)}{q^j \cdot (q^{k-j} - 1)} \\ &= \prod_{j=0}^{k-1} \frac{q^{n-j-1}}{q^{k-j-1}} = \prod_{j=0}^{k-1} \frac{[n-j]_q}{[k-j]_q} \\ &= \frac{[n]_q \cdot [n-1]_q \cdots [n-k+1]_q}{[k]_q \cdot [k-1]_q \cdots [1]_q} = \binom{n}{k}_q. \quad \square \end{aligned}$$

*Anmerkung:* Was passiert für  $q \rightarrow 1$ ? Endlicher Körper mit einem Element (existiert natürlich nicht, mindestens 0 und 1)? Siehe "leicht esoterisches Forschungsgebiet"  $\mathbb{F}_{un}$ .

*Anmerkung:*  $[n]_q!$  ist die Anzahl der vollständigen Fahnen in  $\mathbb{F}_q^n$ . Eine Fahne (Flag) eines Vektorraums ist eine Folge  $\{0\} = W_0 \subsetneq W_1 \subsetneq W_2 \subsetneq \dots \subsetneq W_k = V$  von Unterräumen. Eine Fahne heißt vollständige Fahne, falls  $k = \dim V$ .

*Beweis:* Übung. □

*Anmerkung:*  $[n]_q$  ist die Anzahl der Punkte im projektiven Raum  $\mathbb{P}(\mathbb{F}_q^n)$ .

*Beweis:* Übung. □

## 1.4 Stirling-Partitions-Zahlen

**Definition 1.4** (Partition): Sei  $S$  eine Menge. Eine Partition  $\{P_1, \dots, P_k\}$  von  $S$  ist eine Menge von Teilmengen mit

$$P_1 \cup \dots \cup P_k = S, \quad P_i \cap P_j = \emptyset \text{ für } i \neq j, \quad \forall i: P_i \neq \emptyset.$$

*Beispiel:* Eine Partition von  $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  ist  $\{\{1, 3, 5\}, \{2, 4\}\}$ . Die Reihenfolge der Teilmengen und Elemente ist natürlich irrelevant.

**Definition 1.5** (Stirling-Partitions-Zahl): Die *Stirling-Partitions-Zahlen* (*Stirling-Zahlen zweiter Art*) sind

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \# \text{ Partitionen von } [n] \text{ in } k \text{ Mengen.}$$

**Proposition 1.6** (Rekursion für Stirling-Partitions-Zahlen): Es ist

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} &= 1, \\ \begin{Bmatrix} n \\ 0 \end{Bmatrix} &= 0 \quad n > 0, \\ \begin{Bmatrix} 0 \\ k \end{Bmatrix} &= 0 \quad k > 0, \\ \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{Bmatrix} + k \cdot \begin{Bmatrix} n-1 \\ k \end{Bmatrix}. \end{aligned}$$

*Beweis:* Fallunterscheidung:

- $n$  bildet eine eigene Teilmenge, die Anzahl der Möglichkeiten dafür ist

$$\begin{Bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{Bmatrix}.$$

- $n$  ist Element einer mehrelementigen Menge, die Anzahl der Möglichkeiten ist

$$k \cdot \begin{Bmatrix} n-1 \\ k \end{Bmatrix}. \quad \square$$

*Übung:* Man berechne eine Tabelle der Stirling-Partitions-Zahlen und der Stirling-Zyklus-Zahlen.

**Proposition 1.7** (Erzeugende Funktion der Stirling-Partitions-Zahlen): Es gilt

$$\sum_{k \geq 0} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} x^{\underline{k}} = x^n,$$

wobei  $x^{\underline{k}}$  die *fallende Faktorielle* ist,

$$x^{\underline{k}} = x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdots (x-k+1).$$

*Beweis:* Beide Seiten der Gleichung sind Polynome in  $x$  von Grad  $n$ . Wir beweisen die Äquivalenz für  $x \in \mathbb{N}$ .

$x^n$  ist die Anzahl der Abbildungen  $f: [n] \rightarrow [x]$ . Wir zählen diese Abbildungen nun auf andere Weise. Sei nun  $f: [n] \rightarrow [x]$ . Wir definieren eine Äquivalenzrelation  $\sim$  über  $[n]$  durch

$$a \sim b \Leftrightarrow f(a) = f(b).$$

Die Äquivalenzklassen bilden eine Partition von  $[n]$  in  $k$  Mengen, ein Wert von  $f$  pro Klasse  $P_1, \dots, P_k$ . Für  $f(P_1)$  gibt es  $x$  Möglichkeiten, für  $f(P_2)$   $x-1$  Möglichkeiten,  $\dots$ , für  $f(P_k)$  noch  $x-k+1$  Möglichkeiten.

Für jede Partition von  $[n]$  in  $k$  Mengen haben wir also

$$x^{\underline{k}} = x \cdot (x-1) \cdots (x-k+1)$$

Möglichkeiten für  $f$ . □

Unsere zwei Ergebnisse  $\star_1, \star_2$  zu Stirling-Identitäten sind also

$$\sum_{k \geq 0} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k = x^{\bar{n}}, \quad \sum_{k \geq 0} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} x^k = x^n.$$

Ersetzen von  $x \mapsto -x$  in der ersten Identität ( $\star_1$ ) ergibt

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 0} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (-1)^k x^k &= (-x) \cdot (-x+1) \cdots (-x+n-1) \\ &= (-1)^n x \cdot (x-1) \cdots (x-n+1) \\ &= (-1)^n x^{\bar{n}} \end{aligned}$$

Wir haben also  $\star_{1'}$ ,

$$\sum_{k \geq 0} (-1)^{n-k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k = x^{\bar{n}}.$$

Betrachte die Identitäten ( $\star_1$ ) und ( $\star_2$ ) für  $0 \leq n \leq N$ :  $1, x, x^2, \dots, x^n$  bildet eine Basis des Vektorraums der Polynome von Grad  $\leq n$  über  $\mathbb{Q}$ . Auch  $x^0, x^1, x^2, \dots, x^n$  bildet eine Basis desselben Vektorraums.

Die beiden Identitäten ( $\star_{1'}$ ) und ( $\star_2$ ) beschreiben die Koordinatentransformation beim Basiswechsel. Die beiden zugehörigen Matrizen sind invers zueinander.

$$\left( (-1)^{n-k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \right)_{\substack{0 \leq k \leq N \\ 0 \leq n \leq N}} = \left( \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \right)_{\substack{0 \leq k \leq N \\ 0 \leq n \leq N}}^{-1}.$$

**Proposition 1.8:** Seien  $a_0, \dots, a_n$  und  $b_0, \dots, b_n \in K \supseteq \mathbb{Q}$ . Dann

$$b_j = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} a_k \Leftrightarrow a_j = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} b_k.$$

*Beweis:* Als Matrix-Vektor-Produkt anschreiben und obige Inversion verwenden. □

# Kapitel 2

## Siebmethoden

### 2.1 Möbius-Inversion

Gemeinsame Verallgemeinerung von

- Inklusion-Exklusion,
- klassische Möbius-Inversion (Zahlentheorie).

Seien  $A, B, C$  Mengen mit der Eigenschaft  $A \cap B = B \cap C = C \cap A = A \cap B \cap C$ .

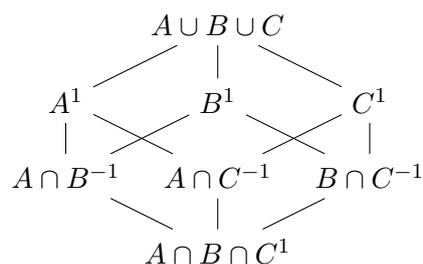
Die übliche Inklusions-Exklusions-Formel lautet

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|.$$

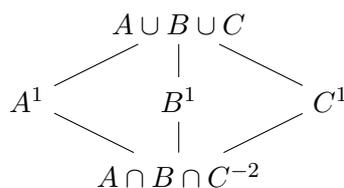
In unserem Fall gilt wegen der geforderten Eigenschaft

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - 2 \cdot |A \cap B \cap C|.$$

Bildlich dargestellt gilt üblicherweise



In unserem Fall haben wir, einfacher,



Allgemeine Idee: Berechne die Koeffizienten aus der Struktur dieser Partialordnungen.

### 2.1.1 Möbius-Inversions-Satz

**Definition 2.1:** Sei  $P$  eine Menge,  $\leq$  eine Partialordnung auf  $P$ , erfülle also die Eigenschaften

- $\leq$  reflexiv:  $\forall x \in P : x \leq x$ ,
- $\leq$  transitiv:  $\forall x, y, z \in P : x \leq y \wedge y \leq z \implies x \leq z$ ,
- $\leq$  antisymmetrisch:  $\forall x, y \in P : x \leq y \wedge y \leq x \implies x = y$ .

Dann heißt  $(P, \leq)$  *Partialordnung* oder “partially ordered set”, *Poset*.

Wie üblich definieren wir  $x < y \Leftrightarrow x \leq y \wedge x \neq y$ .

Für  $x \leq y$  sei weiters das *Intervall*  $[x, y]$  definiert durch

$$[x, y] = \{z \in P \mid x \leq z \leq y\}.$$

$P$  heißt *lokal-endlich*, falls  $[x, y]$  für alle  $x \leq y$  eine endliche Menge ist.

Ein Element  $z$  heißt *kleinstes* Element von  $P$ , falls  $\forall x : z \leq x$ . Analog heißt  $z$  *größtes* Element, falls  $\forall x : x \leq z$ . “Generische Notation”: 0 ist das kleinste, 1 das größte Element.

*Beispiel:*

- $(\mathbb{Z}, \leq)$  ist ein Poset und lokal-endlich, obwohl  $\mathbb{Z}$  nicht endlich ist. Es gibt kein größtes oder kleinstes Element.
- $(\mathbb{N}, \leq)$  ist ebenfalls ein lokal-endliches Poset mit kleinstem Element (“Nullelement”) 1.
- Für eine Menge  $S$  ist  $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$  ein Poset, aber nicht notwendigerweise ein lokal-endliches. Kleinstes Element ist  $\emptyset$ , größtes  $S$ .
- $(\mathbb{N}, \mid)$  (mit  $x \mid y \Leftrightarrow \exists z \in \mathbb{N} : y = x \cdot z$ ) ist ein lokal-endliches Poset (da  $[x, y] = \{z \in \mathbb{N} \mid x \mid z \mid y\}$  endlich), aber nicht endlich. Kleinstes Element ist 1, es gibt kein größtes Element.

**Definition 2.2:** Sei  $P$  ein Poset mit  $x, y \in P$ .  $y$  *überdeckt* (covers)  $x$ , falls

- $x \leq y$
- $[x, y] = \{x, y\}$ , dh. es gibt keine Elemente zwischen  $x$  und  $y$ .

**Definition 2.3** (Hasse-Diagramm): Das Hasse-Diagramm eines Posets  $P$  ist ein gerichteter Graph, dessen Knoten die Elemente von  $P$  sind. Zwei Knoten  $x, y$  sind durch eine Kante verbunden, falls  $y$  das Element  $x$  überdeckt. Konvention: alle Kanten werden “nach oben” gezeichnet.

**Definition 2.4:** Sei  $P$  ein lokal-endliches Poset.  $\text{Int } P$  ist die Menge der Intervalle von  $P$ ,

$$\text{Int}(P) = \{[x, y] \mid x \leq y\}.$$

Inzidenzalgebra von  $P$ :

$$\mathcal{I}(P) = \{f : \text{Int}(P) \rightarrow \mathbb{C}\}.$$

Wir schreiben  $f([x, y])$  auch als  $f(x, y)$ .

Für  $f, g \in \mathcal{I}(P)$  und  $\alpha \in \mathbb{C}$  definieren wir die Operationen

- $+$  :  $\mathcal{I}(P) \times \mathcal{I}(P) \rightarrow \mathcal{I}(P)$  als  $(f + g)(x, y) = f(x, y) + g(x, y)$ ,
- $\cdot$  :  $\mathbb{C} \times \mathcal{I}(P) \rightarrow \mathcal{I}(P)$  als  $(\alpha \cdot f)(x, y) = \alpha \cdot (f(x, y))$ .

Definiere weiters (Konvolution, Faltung)

$$\bullet * : \mathcal{I}(P) \times \mathcal{I}(P) \rightarrow \mathcal{I}(P) \text{ als } (f * g)(x, y) = \sum_{z \in [x, y]} f(x, z) \cdot g(z, y).$$

Damit diese Summe endlich ist, benötigen wir die Voraussetzung der lokal-Endlichkeit.

**Proposition 2.1:**  $\mathcal{I}(P)$  ist eine assoziative unitäre  $\mathbb{C}$ -Algebra mit Einselement  $\delta \in \mathcal{I}(P)$  mit

$$\delta(x, y) = [x = y] = \begin{cases} 1 & x = y \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$\mathcal{I}(P)$  ist also ein  $\mathbb{C}$ -Vektorraum,  $*$  ist assoziativ,  $\delta$  ist neutrales Element bezüglich  $*$ , und  $+$ ,  $\cdot$ ,  $*$  sind kompatibel:

$$\begin{aligned} (f + g) * (\tilde{f} + \tilde{g}) &= f * \tilde{f} + g * \tilde{f} + f * \tilde{g} + g * \tilde{g} \\ (\alpha f) * (\beta g) &= \alpha\beta(f * g). \end{aligned}$$

*Beweis:* Übung. Beispielsweise

$$(f * \delta)(x, y) = \sum_{z \in [x, y]} f(x, z)\delta(z, y) = \sum_{\substack{z \in [x, y] \\ z=y \vee x \leq y}} f(x, z) = f(x, y). \quad \square$$

**Proposition 2.2:** Sei  $P$  ein lokal-endliches Poset,  $f \in \mathcal{I}(P)$ . Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

1.  $f$  hat ein Links-Inverses,  $\exists g : g * f = \delta$ ,
2.  $f$  hat ein Rechts-Inverses,  $\exists g : f * g = \delta$ ,
3.  $f$  hat ein Inverses,  $\exists g : g * f = f * g = \delta$ ,
4.  $\forall x \in P : f(x, x) \neq 0$ .

In diesem Fall ist

$$\begin{aligned} f^{-1}(x, y) = g(x, y) &= \begin{cases} \frac{1}{f(x, x)} & x = y \\ -\frac{1}{f(y, y)} \sum_{x \leq z < y} g(x, z)f(z, y) & x < y \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{f(x, x)} & x = y \\ -\frac{1}{f(x, x)} \sum_{x < z \leq y} f(x, z)g(z, y) & x < y. \end{cases} \end{aligned}$$

*Beweis:*

- 3  $\rightarrow$  1: trivial
- 3  $\rightarrow$  2: trivial
- 1  $\rightarrow$  4: Sei  $g$  ein Linksinverses von  $f$ . Dann ist

$$1 = \delta(x, x) = (g * f)(x, x) = \sum_{z: x \leq z \leq x} g(x, z)f(z, x) = g(x, x) \cdot f(x, x)$$

Also muss  $f(x, x) \neq 0$ ,  $g(x, x) \neq 0$  für alle  $x \in P$ .

- 2  $\rightarrow$  4: analog.

- 4 → 1: Wir konstruieren ein Linksinverses  $g$  für  $f$ . Definiere dazu  $g(x, y)$  rekursiv durch die Anzahl der Elemente im Intervall  $[x, y]$ .

Rekursionsanfang bzw. Abbruchbedingung für  $x = y$ :

$$1 = \delta(x, x) = (g * f)(x, x) = g(x, x)f(x, x) \Rightarrow g(x, x) = \frac{1}{f(x, x)}.$$

Allgemeiner Fall:

$$\begin{aligned} 0 = \delta(x, y) &= (g * f)(x, y) = \sum_{z: x \leq z \leq y} g(x, z)f(z, y) \\ &= g(x, y)f(y, y) + \sum_{z: x \leq z < y} g(x, z)f(z, y). \end{aligned}$$

Daher ist

$$g(x, y) = -\frac{1}{f(y, y)} \sum_{z: x \leq z < y} g(x, z)f(z, y).$$

- 4 → 2 Konstruktion der rechten Inverse  $h$  von  $f$ : Anfang wie vorher,

$$h(x, x) = \frac{1}{f(x, x)}$$

Es ist

$$0 = \sum_{z: x \leq z \leq y} f(x, z)h(z, y) = f(x, x)h(x, y) + \sum_{z: x < z \leq y} f(x, z)h(z, y).$$

Also

$$h(x, y) = -\frac{1}{f(x, x)} \sum_{x < z \leq y} f(x, z)h(z, y).$$

Das ist leider nicht dasselbe Ergebnis wie vorher.

- 1, 2 → 3: Sei  $g$  die Linksinverse,  $h$  die Rechtsinverse von  $f$ .

$$g = g * \delta = g * (f * h) = (g * f) * h = \delta * h = h. \quad \square$$

**Definition 2.5:** Sei  $P$  ein lokal-endliches Poset. Definiere die Zeta-Funktion  $\zeta \in \mathcal{I}(P)$  durch

$$\zeta(x, y) = 1 \quad \forall x \leq y$$

sowie ihre Inverse  $\mu \in \mathcal{I}(P)$ , die Möbius-Funktion. Wegen obiger Proposition ist

$$\begin{aligned} \mu(x, x) &= 1 \\ \mu(x, y) &= - \sum_{z: x \leq z < y} \mu(x, z) = - \sum_{z: x < z \leq y} \mu(z, y). \end{aligned}$$

**Satz 2.3 (Möbius-Inversion-Satz):** Sei  $P$  ein lokal-endliches Poset sowie  $f : P \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $g : P \rightarrow \mathbb{C}$ .

1. Falls  $P$  ein kleinstes Element hat, dann sind die folgenden beiden Bedingungen äquivalent:

$$g(a) = \sum_{x \leq a} f(x) \quad \forall a \in P$$

und

$$f(a) = \sum_{x \leq a} g(x)\mu(x, a) \quad \forall a \in P.$$

2. Falls  $P$  ein größtes Element hat, dann sind die folgenden beiden Bedingungen äquivalent:

$$g(a) = \sum_{x \geq a} f(x) \quad \forall a \in P$$

und

$$f(a) = \sum_{x \geq a} \mu(a, x)g(x) \quad \forall a \in P.$$

*Beweis:* Zeige die erste Aussage, die zweite folgt analog.

Wir definieren  $F, G \in \mathcal{I}(P)$  durch

$$\begin{aligned} F(0, a) &= f(a), & G(0, a) &= g(a) \quad \forall a \in P \\ F(x, y) &= 0 = G(x, y) \quad \forall x, y : 0 < x \leq y \end{aligned}$$

Dann ist

$$g(a) = \sum_{x \leq a} f(x)$$

genau dann wenn

$$\forall a \in P : G(0, a) = \sum_{0 \leq x \leq a} F(0, x)\zeta(x, a) \quad \wedge \quad \forall 0 < x \leq y : G(x, y) = \sum_{x \leq z \leq y} F(x, z)\zeta(z, y)$$

Das ist äquivalent zu

$$G = F * \zeta,$$

was laut Definition von  $\mu$  äquivalent ist zu

$$G * \mu = F.$$

Das gilt genau dann, wenn

$$\begin{aligned} F(0, a) &= \sum_{0 \leq x \leq a} G(0, x)\mu(x, a) \quad \forall a \in P \\ F(x, y) &= \sum_{x \leq z \leq y} G(x, z)\mu(z, y) \quad \forall 0 < x \leq y. \end{aligned}$$

Das wiederum ist äquivalent zu

$$f(a) = \sum_{0 \leq x \leq a} g(x)\mu(x, a).$$

### 2.1.2 Differenzen-Kalkül

Spezialfall der Möbiusinversion für das Poset  $C_j = \{0 < 1 < 2 < \dots < j - 1\}$ :

$$\begin{aligned} \mu(x, x) &= 1 \quad \forall x \in C_j \\ \mu(x, x+1) &= - \sum_{x \leq z < x+1} \mu(x, z) = -\mu(x, x) = -1 \\ \mu(x, x+2) &= -\mu(x, x) - \mu(x, x+1) = 0 \\ \mu(x, y) &= -\mu(x, x) - \mu(x, x+1) - \mu(x, x+2) - \dots - \mu(x, y-1) = 0 \quad y > x+1 \end{aligned}$$

Damit haben wir insgesamt für dieses Poset

$$\mu(x, y) = \begin{cases} 1 & y = x \\ -1 & y = x + 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Laut Möbius-Inversion ist

$$\forall a \in C_j : g(a) = \sum_{x \leq a} f(x)$$

äquivalent zu

$$f(a) = \sum_{x \leq a} g(x) \mu(x, a) = \sum_{x \leq a-2} g(x) \mu(x, a) + g(a-1) \mu(a-1, a) + g(a) \mu(a, a)$$

dh. es ist

$$f(a) = g(a) - g(a-1) \quad \forall a > 0, \quad f(0) = g(0).$$

Das ist keine Überraschung:

“ $\Rightarrow$ ” durch Subtrahieren

“ $\Leftarrow$ ” Teleskopsumme:

$$\sum_{x \leq a} f(x) = f(0) + \sum_{0 < x \leq a} (g(x) - g(x-1)) = g(a) - g(0) + g(0) = g(a).$$

Weiteres zu Differenzenkalkül: definiere den Differenzoperator

$$(\Delta f)(x) = f(x+1) - f(x).$$

Ersetze  $g(a) = h(a+1)$ :

$$h(a) = \sum_{x < a} f(x) \Leftrightarrow f(a) = h(a+1) - h(a) = (\Delta h)(a), \quad f(0) = h(1).$$

*Anmerkung:* Kontinuierlicher Fall:

$$h(a) = \int_0^a f(x) dx \Leftrightarrow f(a) = \left( \frac{d}{dx} h(x) \right) \Big|_{x=a} = h'(a).$$

*Beispiel* (“Differentiation”): Sei  $n \in \mathbb{N}$  fix.

$$\begin{aligned} \Delta x^n &= (x+1)^n - x^n = (x+1)x^{n-1} - x^{n-1}(x-n+1) \\ &= x^{n-1}(x+1-x+n-1) = n \cdot x^{n-1}. \end{aligned}$$

Uns interessiert als nächstes  $x^{-n}$  für  $n \in \mathbb{N}$ .

*Anmerkung:* Die Funktion  $\Gamma(x)$  ist meromorph und definiert auf  $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N}_0)$ . Sie erfüllt

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad x \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N}_0).$$

Definition beispielsweise durch

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \quad \operatorname{Re} x > 0.$$

Für  $n \in \mathbb{N}$  ist

$$x^n = x(x-1) \cdots (x-n+1) = \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x-n+1)}$$

wegen

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) = x(x-1)\Gamma(x-1) = \dots = x(x-1) \cdots (x-n+1)\Gamma(x-n+1).$$

Für  $n \in \mathbb{N}$  setzen wir

$$\begin{aligned} x^{-n} &= \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x+n+1)} = \frac{\Gamma(x+1)}{(x+n)\Gamma(x+n)} \\ &= \frac{\Gamma(x+1)}{(x+n)(x+n-1) \cdots (x+1)\Gamma(x+1)} \\ &= \frac{1}{(x+1) \cdots (x+n)} = \frac{1}{(x+1)^{\bar{n}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta x^{-n} &= \Delta \frac{1}{(x+1)^{\bar{n}}} = \frac{1}{(x+2)^{\bar{n}}} - \frac{1}{(x+1)^{\bar{n}}} \\ &= \frac{1}{(x+2)^{\bar{n}-1} \cdot (x+2+n-1)} - \frac{1}{(x+1) \cdot (x+2)^{\bar{n}-1}} \\ &= \frac{1}{(x+2)^{\bar{n}-1}} \left( \frac{x+1 - (x+n+1)}{(x+n+1)(x+1)} \right) \\ &= \frac{1 \cdot (-n)}{(x+2)^{\bar{n}-1} \cdot (x+1) \cdot (x+n+1)} \\ &= -n \cdot \frac{1}{(x+1)^{\bar{n}+1}} = -nx^{-(n+1)} \end{aligned}$$

Also gilt für  $m \in \mathbb{Z}$

$$\Delta x^m = m \cdot x^{m-1}.$$

*Beispiel:* Finde eine geschlossene Formel für

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^3.$$

Es ist

$$k^3 = \begin{Bmatrix} 3 \\ 1 \end{Bmatrix} k^1 + \begin{Bmatrix} 3 \\ 2 \end{Bmatrix} k^2 + \begin{Bmatrix} 3 \\ 3 \end{Bmatrix} k^3.$$

Also ist

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} k^3 &= \begin{Bmatrix} 3 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{1}{2} n^2 + \begin{Bmatrix} 3 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{1}{3} n^3 + \begin{Bmatrix} 3 \\ 3 \end{Bmatrix} \frac{1}{4} n^4 \\ &= \left( \frac{n \cdot (n-1)}{2} \right)^2. \end{aligned}$$

### 2.1.3 Möbiusfunktion von Produkten von Posets

**Definition 2.6:** Seien  $P_1, P_2$  Posets. Dann definiere  $\leq$  auf  $P_1 \times P_2$  durch

$$(a, b) \leq (c, d) \Leftrightarrow a \leq c \wedge b \leq d,$$

“Produkt-Poset”, koordinatenweise (wobei  $a, c \in P_1, b, d \in P_2$ ).

**Proposition 2.4:** Seien  $P_1, P_2$  lokal-endliche Posets mit Möbiusfunktionen  $\mu_1, \mu_2$ . Dann ist die Möbiusfunktion  $\mu$  von  $P$  gegeben durch

$$\mu((a, b), (c, d)) = \mu_1(a, c) \cdot \mu_2(b, d).$$

*Beweis:* Durch Induktion nach  $|[a, c]| + |[b, d]|$ .

- Basis:  $(a, b) = (c, d)$ , dann  $1 = 1 \cdot 1$ , passt.
- Allgemein: Sei  $a \neq c$  oder  $b \neq d$ .

$$\begin{aligned} \mu((a, b), (c, d)) &= - \sum_{(a,b) \leq (x,y) < (c,d)} \mu((a, b), (x, y)) \\ &= - \sum_{(a,b) \leq (x,y) < (c,d)} \mu_1(a, x) \cdot \mu_2(b, y) \\ &= \mu_1(a, c) \mu_2(b, d) - \sum_{(a,b) \leq (x,y) \leq (c,d)} \mu_1(a, x) \cdot \mu_2(b, y) \\ &= \mu_1(a, c) \mu_2(b, d) - \sum_{a \leq x \leq c} \mu_1(a, x) \sum_{b \leq y \leq d} \mu_2(b, y) \\ &= \mu_1(a, c) \mu_2(b, d) - (\mu_1 * \zeta_1)(a, c) (\mu_2 * \zeta_2)(b, d) \\ &= \mu_1(a, c) \mu_2(b, d), \end{aligned}$$

wobei  $\zeta_1$  bzw.  $\zeta_2$  die  $\zeta$ -Funktion auf  $P_1$  bzw.  $P_2$  bezeichnen.

*Beispiel:* Sei  $P = C_{j_1} \times \dots \times C_{j_k}$  ein Produkt von Ketten (Chains).

$$\begin{aligned} \mu((a_1, \dots, a_k), (b_1, \dots, b_k)) &= \mu_1(a_1, b_1) \mu_2(a_2, b_2) \cdots \mu_k(a_k, b_k) \\ &= \begin{cases} (-1)^{\sum_{j=1}^k (b_j - a_j)} & \text{wenn } \forall j : b_j \leq a_j + 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

*Beispiel (Beispiel zum Beispiel):* Betrachte natürliche Zahlen mit Teilerrelation,  $(\mathbb{N}, \cdot | \cdot)$ . Gesucht ist  $\mu(k, \ell)$ .

$$\begin{aligned} [k, \ell] &= \{d \mid (k \mid d \wedge d \mid \ell)\} \\ &= \{e \cdot k \mid e \in \mathbb{N} \wedge e \cdot k \mid \ell\} = \left\{ e \cdot k \mid e \in \mathbb{N} \wedge e \mid \frac{\ell}{k} \right\} \\ &\simeq \left[ 1, \frac{\ell}{k} \right] \simeq C_{\ell_1+1} \times \dots \times C_{\ell_k+1}, \end{aligned}$$

wobei die Primfaktorzerlegung von  $\frac{\ell}{k}$  mit  $\ell_j \geq 1$  gegeben ist als

$$\frac{\ell}{k} = p_1^{\ell_1} \cdots p_r^{\ell_r}.$$

Also ist

$$\begin{aligned}\mu(k, \ell) &= \mu\left(1, \frac{\ell}{k}\right) = \mu((0, \dots, 0), (\ell_1, \dots, \ell_r)) \\ &= \begin{cases} 0 & \exists j : \ell_j \geq 2 \\ (-1)^{\ell_1 + \dots + \ell_r} & \text{sonst} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \frac{\ell}{k} \text{ nicht quadratfrei,} \\ (-1)^r & \frac{\ell}{k} \text{ quadratfrei.} \end{cases}\end{aligned}$$

(wobei  $d \in \mathbb{Z}$  quadratfrei heißt, falls  $x^2 \mid d \Rightarrow x = 1$  für alle  $x \in \mathbb{N}$ ).

Das entspricht der klassischen Möbius-Funktion der Zahlentheorie,

$$\mu(d) = \begin{cases} (-1)^r & d \text{ ist quadratfrei und Produkt von } r \text{ Primzahlen} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Also ist

$$\mu(k, \ell) = \mu\left(1, \frac{\ell}{k}\right) = \mu\left(\frac{\ell}{k}\right).$$

Unsere Möbius-Funktion ist folglich eine Verallgemeinerung der zahlentheoretischen Möbius-funktion.

*Beispiel* (Beispiel zum Beispiel zum Beispiel,  $\varphi$ -Funktion): Betrachte

$$\varphi(n) = |\{k \in [n] \mid \text{ggT}(k, n) = 1\}|.$$

Beobachtung: gegeben seien die  $n$  rationalen Zahlen

$$\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \dots, \frac{n}{n}.$$

Falls  $\text{ggT}(k, n) = d$ , kann man kürzen zu

$$\frac{k}{n} = \frac{k/d}{n/d}.$$

Dabei ist  $e = n/d$  ein Faktor von  $n$ . Gesucht ist die Anzahl gekürzter Brüche  $\frac{m}{e}$ . Diese ist genau  $\varphi(e)$ . Also muss

$$n = \sum_{e|n} \varphi(e).$$

Wir wenden hierauf die Möbius-Inversion an. Das ergibt

$$\begin{aligned}\varphi(n) &= \sum_{e|n} e \cdot \mu(e, n) = \sum_{e|n} e \cdot \mu\left(1, \frac{n}{e}\right) \\ &= \sum_{d|n} \mu(d) \cdot \frac{n}{d} = \sum_{\substack{d|n \\ d \text{ quadratfrei}}} (-1)^{\#\text{ Primfaktoren von } d} \cdot \frac{n}{d}.\end{aligned}$$

Sei die Primfaktorzerlegung von  $n$  gegeben durch

$$n = p_1^{\ell_1} \cdots p_r^{\ell_r}, \quad \ell_j \geq 1.$$

Dann haben alle  $d \mid n$ ,  $d$  quadratfrei, eine Darstellung  $d = p_1^{a_1} \cdots p_r^{a_r}$  mit  $0 \leq a_j \leq 1$ . Also ist

$$\begin{aligned} \varphi(n) &= \sum_{a_1=0}^1 \sum_{a_2=0}^1 \cdots \sum_{a_r=0}^1 (-1)^{a_1+\dots+a_r} \frac{n}{p_1^{a_1} \cdots p_r^{a_r}} \\ &= n \cdot \prod_{j=1}^r \left( \sum_{a_j=0}^1 \frac{(-1)^{a_j}}{p_j^{a_j}} \right) = n \cdot \prod_{j=1}^r \left( 1 - \frac{1}{p_j} \right). \end{aligned}$$

Das ist die übliche Formel zur Berechnung von  $\varphi(n)$ .

*Anmerkung* (Namen): Sei  $f$  eine Funktion in der Inzidenzalgebra von  $(\mathbb{N}, \cdot \mid \cdot)$  mit der Eigenschaft, dass  $f(a, b) = f(1, b/a)$  für alle  $a \mid b$ . Wir definieren die zugehörige Dirichletreihe durch

$$L_f(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{f(1, n)}{n^s}.$$

Es gilt für zwei Funktionen  $f$  und  $g$  mit obiger Homogenitätseigenschaft (selbst überprüfen):

$$\begin{aligned} L_{f * g}(s) &= L_f(s) L_g(s), \\ L_\zeta(s) &= \sum_{n \geq 1} \frac{\zeta(1, n)}{n^s} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s} = \zeta(s) \end{aligned}$$

(Riemannsche Zeta-Funktion).

Wegen  $\mu * \zeta = \delta$  gilt außerdem

$$1 = L_\delta = L_\zeta(s) L_\mu(s) \Rightarrow \frac{1}{\zeta(s)} = L_\mu(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{\mu(n)}{n^s}.$$

#### 2.1.4 Inklusion-Exklusion

Sei  $S$  eine endliche Menge. Wir betrachten das Poset  $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ . Sei  $A \subseteq B \subseteq S$ . Wir berechnen  $\mu(A, B)$ .

$$[A, B] = \{C \mid A \subseteq C \subseteq B\} = \{A \cup E \mid \emptyset \subseteq E \subseteq B \setminus A\} \simeq [\emptyset, B \setminus A].$$

Sei  $B \setminus A = \{x_1, \dots, x_r\}$ . Dann ist (mit  $r$  Faktoren  $\mathcal{C}_2$ )

$$[\emptyset, B \setminus A] \simeq \mathcal{C}_2 \times \dots \times \mathcal{C}_2.$$

Also

$$\begin{aligned} \mu(A, B) &= \mu(\emptyset, B \setminus A) = \mu((0, \dots, 0), (1, \dots, 1)) \\ &= (\mu_{\mathcal{C}_2}(0, 1))^r = (-1)^r = (-1)^{|B \setminus A|} = (-1)^{|B| - |A|}. \end{aligned}$$

Möbius-Inversion:

$$\begin{aligned} f(A) &= \sum_{B \subseteq A} g(B) \Leftrightarrow g(A) = \sum_{B \subseteq A} (-1)^{|A| - |B|} f(B) \\ f(A) &= \sum_{B \supseteq A} g(B) \Leftrightarrow g(A) = \sum_{B \supseteq A} (-1)^{|B| - |A|} f(B) \end{aligned}$$

*Beispiel* (Typische Anwendung): Sei  $S$  eine endliche Menge von Eigenschaften und  $X$  eine Menge, deren Elemente diese Eigenschaften erfüllen oder nicht.

Für  $A \subseteq S$ , setze

$$f_=(A) = |\{x \in X \mid x \text{ erfüllt alle Eigenschaften in } A \text{ und keine in } S \setminus A\}|$$

$$f_\supseteq(A) = |\{x \in X \mid x \text{ erfüllt alle Eigenschaften in } A \text{ (und ggf. mehr)}\}|$$

Dann ist

$$f_\supseteq(A) = \sum_{B \supseteq A} f_=(B).$$

Möbius-Inversion bzw. Inklusion-Exklusion ergibt

$$f_=(A) = \sum_{B \supseteq A} f_\supseteq(B) \cdot (-1)^{|B|-|A|}.$$

*Beispiel* (Beispiel für diese Anwendung): Andere Variante der Berechnung von  $\varphi(n)$ . Sei  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n = p_1^{\ell_1} \cdots p_r^{\ell_r}$ . Sei  $X = [n]$  und  $S = [r]$ , wobei die  $j$ -te Eigenschaft für  $x$  ist, dass  $p_j \mid x$ . Uns interessiert

$$f_=(\emptyset) = |\{x \in [n] \mid \nexists j : p_j \mid x\}| = \varphi(n).$$

Möbius und Co. ergeben

$$\varphi(n) = f_=(\emptyset) = \sum_{B \supseteq \emptyset} f_\supseteq(B) (-1)^{|B|}.$$

Sei  $B = \{j_1, \dots, j_k\}$  für irgendwelche  $j_1 < \dots < j_k$ . Damit

$$f_\supseteq(B) = |\{x \in [n] \mid p_{j_1} \mid x, p_{j_2} \mid x, \dots, p_{j_k} \mid x\}|$$

$$= |\{x \in [n] \mid p_{j_1} \cdots p_{j_k} \mid x\}| = \frac{n}{p_{j_1} \cdots p_{j_k}}.$$

Damit erhalten wir wieder

$$\varphi(n) = \sum_{k=0}^r \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq r} (-1)^k \frac{n}{p_{j_1} \cdots p_{j_k}}$$

$$= n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right).$$

*Beispiel* (Weitere Variante): Sei  $X$  eine endliche Menge,  $M_1, \dots, M_k$  Teilmengen von  $X$ . Die  $j$ -te Eigenschaft von  $x$  sei  $x \in M_j$ . Dann ist

$$f_=(A) = |\{x \in X \mid x \in M_j \text{ für } j \in A \text{ und } x \notin M_j \text{ für } j \notin A\}|,$$

$$f_\supseteq(A) = |\{x \in X \mid x \in M_j \text{ für } j \in A\}| = \left| \bigcap_{j \in A} M_j \right|.$$

Damit ist

$$f_=(\emptyset) = \sum_{A \subseteq [k]} (-1)^{|A|} \left| \bigcap_{j \in A} M_j \right|,$$

$$|X \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_k)| = |X| - \sum_{\substack{A \subseteq [k] \\ A \neq \emptyset}} (-1)^{|A|-1} \left| \bigcap_{j \in A} M_j \right|$$

und damit

$$|A_1 \cup \dots \cup A_k| = \sum_{\substack{A \subseteq [k] \\ A \neq \emptyset}} (-1)^{|A|-1} \left| \bigcap_{j \in A} M_j \right|.$$

### 2.1.5 Satz von Weisner

**Definition 2.7** (Verband (Lattice)): Sei  $P$  ein Poset. Existieren für alle  $x, y \in P$  Infimum  $\inf(x, y)$  und Supremum  $\sup(x, y)$ , dann heißt  $P$  Verband. Man schreibt auch

$$\begin{aligned} x \wedge y &:= \inf(x, y) && \text{“}x \text{ meet } y\text{”} \\ x \vee y &:= \sup(x, y) && \text{“}x \text{ join } y\text{”} \end{aligned}$$

( $d = \inf(x, y)$ , falls  $d \leq x, d \leq y$  und  $\forall z \in P : z \leq x, z \leq y \Rightarrow z \leq d$ , analog  $\sup(x, y)$ ).

*Beispiel:*

- $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ ,  $A \wedge B = A \cap B$  und  $A \vee B = A \cup B$ .
- $(\mathbb{N}, |)$ ,  $x \wedge y = \text{ggT}(x, y)$  und  $x \vee y = \text{kgV}(x, y)$ .
- Sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $\mathbb{F}_q$ -Vektorraum und

$$S = \{W \mid W \text{ Unterraum von } V\}$$

mit der Relation  $\leq$ . Infimum und Supremum sind dann

$$\begin{aligned} U \wedge W &= U \cap W \\ U \vee W &= U + W = \text{span}(U \cup W) = \{u + w \mid u \in U, w \in W\}. \end{aligned}$$

**Satz 2.5** (Weisner): Sei  $L$  ein endlicher Verband,  $a > 0$ . Dann

$$\sum_{\substack{x \in L \\ x \vee a = 1}} \mu(0, x) = 0.$$

*Beweis:* Es gilt

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{x \in L \\ x \vee a = 1}} \mu(0, x) &= \sum_{x \in L} \mu(0, x) \delta(x \vee a, 1) \\ &= \sum_{x \in L} \mu(0, x) (\zeta * \mu)(x \vee a, 1) \\ &= \sum_{x \in L} \mu(0, x) \sum_{\substack{y \in L \\ y \in [x \vee a, 1]}} \underbrace{\zeta(x \vee a, y)}_{=1} \mu(y, 1) \\ &= \sum_{\substack{x, y \in L \\ x \leq y, a \leq y}} \mu(0, x) \mu(y, 1) \\ &= \sum_{\substack{y \in L \\ y \geq a}} \mu(y, 1) \sum_{x \in [0, y]} \mu(0, x) \cdot \zeta(x, y) \\ &= \sum_{\substack{y \in L \\ y \geq a}} \mu(y, 1) (\mu * \zeta)(0, y) \\ &= \sum_{\substack{y \in L \\ y \geq a}} \mu(y, 1) \underbrace{\delta(0, y)}_{=0 \text{ da } y \geq a > 0} = 0. \end{aligned} \quad \square$$

**Lemma 2.6:** Sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $\mathbb{F}_q$ -Vektorraum und  $U, W$  Unterräume von  $V$  mit  $U \subseteq W$ . Dann ist

$$\mu(U, W) = (-1)^{\dim W - \dim U} q^{\binom{\dim W - \dim U}{2}}.$$

*Beweis:* Es ist

$$[U, W] \simeq [\{0\}, \mathbb{F}_q^k], \quad k = \dim W - \dim U.$$

Wir beweisen via Induktion nach  $k$ , dass

$$\mu(\{0\}, \mathbb{F}_q^k) = (-1)^k q^{\binom{k}{2}}.$$

- Basis  $k = 0$ :  $1 = 1$ .
- Schritt  $k - 1 \rightarrow k$ : Sei  $a$  ein eindimensionaler Unterraum von  $\mathbb{F}_q^k$ . Aus dem Satz von Weisner folgt

$$0 = \sum_{\substack{U \leq \mathbb{F}_q^k \\ U+a=\mathbb{F}_q^k}} \mu(\{0\}, U).$$

Also

$$\mu(\{0\}, \mathbb{F}_q^k) = - \sum_{\substack{U \leq \mathbb{F}_q^k \\ U \neq \mathbb{F}_q^k \\ U+a=\mathbb{F}_q^k}} \mu(\{0\}, U).$$

$$k = \dim \mathbb{F}_q^k = \dim(U + a) = \dim U + \underbrace{\dim a}_{=1} - \dim(U \cap a)$$

$$k - 1 = \underbrace{\dim U}_{\leq k-1} - \underbrace{\dim(U \cap a)}_{\geq 0} \leq k - 1 - 0 = k - 1$$

$$\Rightarrow \dim U = k - 1, \quad \dim(U \cap a) = 0 \Leftrightarrow a \not\subseteq U$$

$$\begin{aligned} \mu(\{0\}, \mathbb{F}_q^k) &= -(-1)^{k-1} q^{\binom{k-1}{2}} |\{U \leq V \mid \dim U = k-1, a \not\subseteq U\}| \\ &= (-1)^k q^{\binom{k-1}{2}} \left( \binom{k}{k-1}_q - |\{U \leq V \mid \dim U = k-1, a \leq U\}| \right) \\ &= (-1)^k q^{\binom{k-1}{2}} \left( \binom{k}{k-1}_q - \binom{k-1}{k-2}_q \right) \\ &= (-1)^k q^{\binom{k-1}{2}} ([k]_q - [k-1]_q) \\ &= (-1)^k q^{\binom{k-1}{2}} (1 + q + \dots + q^{k-2} + q^{k-1} - 1 - q - \dots - q^{k-2}) \\ &= (-1)^k q^{\binom{k-1}{2}} \cdot q^{k-1} = (-1)^k q^{\frac{(k-1)(k-2)}{2} + (k-1)} \\ &= (-1)^k q^{\frac{k-1}{2}(k-2+2)} = (-1)^k q^{\binom{k}{2}}. \quad \square \end{aligned}$$

**Proposition 2.7:** Sei  $m, n \in \mathbb{N}$ . Dann ist die Anzahl der Epimorphismen von  $\mathbb{F}_q^n$  nach  $\mathbb{F}_q^m$  gleich

$$\sum_{k=0}^m \binom{m}{k}_q (-1)^{m-k} q^{\binom{m-k}{2} + kn}.$$

*Beweis:* Für  $U \leq \mathbb{F}_q^m$ , definiere

$$\begin{aligned} f(U) &= |\{F : \mathbb{F}_q^n \rightarrow U \mid F \text{ Epimorphismus}\}| \\ g(U) &= |\{F : \mathbb{F}_q^n \rightarrow U \mid F \text{ Homomorphismus}\}| \end{aligned}$$

Offensichtlich gilt

$$\begin{aligned} g(U) &= \sum_{W \leq U} f(W) \\ g(U) &= |U| \cdot |U| \cdots |U| = |U|^n = q^{n \cdot \dim U}, \end{aligned}$$

wobei  $|U|$  jeweils die Anzahl der Auswahlmöglichkeiten für  $F(e_i)$  ist.

Möbius-Inversion ergibt

$$\begin{aligned} f(U) &= \sum_{W \leq U} \mu(W, U) g(W) \\ &= \sum_{k=0}^{\dim U} \sum_{\substack{W \leq U \\ \dim W = k}} (-1)^{\dim U - k} q^{\binom{\dim U - k}{2} + kn} \\ &= \sum_{k=0}^{\dim U} \binom{\dim U}{k}_q (-1)^{\dim U - k} q^{\binom{\dim U - k}{2} + kn}. \end{aligned} \quad \square$$

**Korollar 2.8:** Die Anzahl von  $m \times n$ -Matrizen mit Rang  $r$  über  $\mathbb{F}_q$  ist

$$\binom{m}{r}_q \cdot \sum_{k=0}^r \binom{r}{k}_q (-1)^{r-k} q^{\binom{r-k}{2} + kn}.$$

*Beweis:* Die Anzahl der Unterräume  $U$  von  $\mathbb{F}_q^m$  mit Dimension  $r$  ist

$$\binom{m}{r}_q.$$

Für jeden dieser Unterräume  $U$  haben wir die Anzahl der Epimorphismen von  $\mathbb{F}_q^k$  nach  $U$  berechnet, das entspricht der Anzahl der Matrizen mit Bild  $U$ .  $\square$

## 2.2 Involutionsprinzip

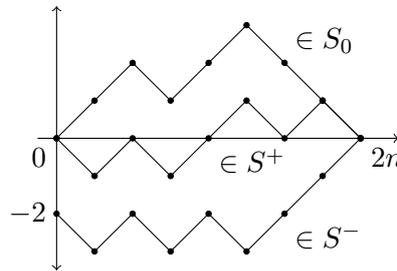
Angenommen, wir wollen die Elemente einer Menge  $S_0$  zählen. Idee: Erweitere  $S_0$  zu einer Menge  $S = S^+ \cup S_0 \cup S^-$ . Finde eine Involution  $f$  (Bijektion mit  $f^2 = \text{id}$ ), so dass

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in S_0 \\ \in S^- & x \in S^+ \\ \in S^+ & x \in S^- \end{cases}$$

Daraus folgt  $|S^-| = |S^+|$ , daher ist

$$|S_0| = |S^+ \cup S_0| - |S^-|.$$

*Beispiel (Catalan-Zahlen):* Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Wir wollen die Anzahl der *Gitterpfade* (Lattice Paths) von  $(0,0)$  nach  $(2n,0)$ , so dass jeder Schritt die Form  $(1,1)$  oder  $(1,-1)$  hat, und so dass die Pfade nie unter die  $x$ -Achse reichen.



Wir setzen

- $S_0$  die Menge der gültigen Gitterpfade,
- $S^+ \cup S_0$  die Menge aller Pfade ohne die  $x$ -Achsen-Einschränkung,
- $S^-$  die Menge der Gitterpfade von  $(0,-2)$  nach  $(2n,0)$  mit den erlaubten Schritten.

Es ist

$$|S^+ \cup S_0| = \binom{2n}{n},$$

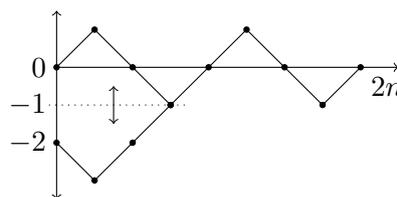
da man aus den  $2n$  Schritten diejenigen wählen kann, die nach oben gehen, und

$$|S^-| = \binom{2n}{n+1},$$

da jetzt  $n+1$  nach oben und  $n-1$  nach unten gehen.

Sei  $S = S^+ \cup S_0 \cup S^-$ . Definiere  $f : S \rightarrow S$  wie folgt:

- falls  $P \in S_0$ , dann  $f(P) = P$ .
- falls  $P \in S^+$ , dann reflektiere den Pfadteil bis zum ersten Vorkommnis von  $y = -1$  an der Linie  $y = -1$ . Damit ist  $f(P) \in S^-$ .
- falls  $P \in S^-$ , analog, also  $f(P) \in S^+$ .



Offensichtlich ist  $f^2 = \text{id}$ , also ist  $f$  eine Involution und wir erhalten

$$\begin{aligned} |S_0| &= \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} \\ &= \frac{(2n)!}{n!n!} - \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!} = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} \cdot ((n+1) - n) \\ &= \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \end{aligned}$$

*Beispiel* (Vandermonde-Determinante): Wir zeigen mittels Involutionsprinzip, dass für die Vandermonde-Determinante gilt

$$\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ x_1 & \dots & x_n \\ \vdots & & \\ x_1^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{j>i} (x_j - x_i).$$

Die linke Seite ergibt (mit  $n!$  Summanden)

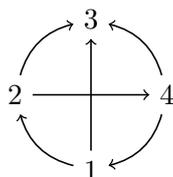
$$\sum_{\sigma \in S_n} \text{sign } \sigma \cdot x_1^{\sigma(1)-1} \dots x_n^{\sigma(n)-1}.$$

Rechts steht

$$\sum (-1)^m x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n}, \quad a_1 + \dots + a_n = \binom{n}{2},$$

wobei  $m$  die Anzahl der Male ist, dass der zweite Summand ausgewählt wurde.  $2^{\binom{n}{2}}$  Summanden.

Ein Turnier (Tournament) ist eine Orientierung des vollständigen Graphen auf  $[n]$ , wobei eine Kante  $i \rightarrow j$  bedeutet, dass  $i$  gegen  $j$  gewinnt.



Ein Turnier heißt transitiv, falls aus Kanten  $i \rightarrow j$  und  $j \rightarrow k$  eine Kante  $i \rightarrow k$  folgt.

Falls ein Turnier eine Kante  $i \rightarrow j$  hat mit  $i > j$ , dann ist das Vorzeichen der Kante  $+1$ , ansonsten  $-1$ .

Wir definieren  $a_i$  als den Ausgangsgrad von Knoten  $i$ , dh. die Anzahl der Siege von  $i$ .

Das Gewicht eines Turniers ist das Produkt der Gewichte der Kanten,

$$x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \cdot \dots \cdot x_n^{a_n}.$$

Das Vorzeichen des Turniers ist das Produkt der Vorzeichen der Kanten, dh.

$$(-1)^{\text{Anzahl Siege des zweiten Teams}}.$$

Rechts steht also

$$\sum_{\text{Turnier } T} \text{sign}(T) \text{weight}(T),$$

links

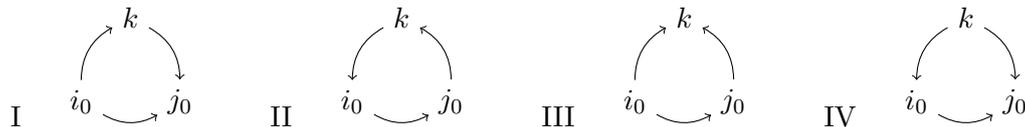
$$\sum_{\text{transitives Turnier } T} \text{sign}(T) \text{weight}(T).$$

Wir brauchen eine Involution  $f$  auf der Menge aller Turniere, die transitive Turniere fix lässt, für die  $\text{sign}(f(T)) = -\text{sign}(T)$  sowie  $\text{weight}(f(T)) = \text{weight}(T)$  gilt. Das würde die Formel beweisen.

Falls  $T$  transitiv ist, setze  $f(T) = T$ . Falls  $T$  nicht transitiv ist, dann gibt es  $i \neq j$  mit  $a_i = a_j$  (ansonsten gäbe es eine Permutation  $\sigma$  von  $[0, n-1]$  mit  $a_i = \sigma_i$ , also ist das Turnier transitiv, Widerspruch).

Wähle  $i_0$  minimal, so dass es  $j$  mit  $a_{i_0} = a_j$  gibt. Dann wähle  $j_0$  minimal, so dass  $j_0 > i_0$  und  $a_{i_0} = a_{j_0}$ .

ObdA gibt es eine Kante  $i_0 \rightarrow j_0$ . Betrachte die drei Knoten  $i_0, j_0, k$ . Es gibt vier verschiedene Situationen:



Die letzten beiden Situationen sind "langweilig". Die Anzahl der Vorkommnisse der zweiten Situation ist gleich der Anzahl der Vorkommnisse der ersten Situation plus 1 (ansonsten wäre  $a_{i_0} = a_{j_0}$  falsch).

$f$  kehrt nun die Richtung aller drei Kanten in den ersten beiden Situationen um.

Es gilt

$$\text{weight}(f(T)) = \text{weight}(T), \quad \text{sign}(f(T)) = -\text{sign}(T),$$

und  $f$  ist eine Involution.

## 2.3 Gessel-Viennot-Lindström-Lemma

Sei  $(V, E)$  ein gerichteter azyklischer Graph (keine gerichteten Kreise). Seien  $\{A_1, \dots, A_n\}$  und  $\{B_1, \dots, B_n\}$  zwei Teilmengen von  $V$  von Kardinalität  $n$  (nicht notwendigerweise disjunkt).

Jede Kante  $e$  hat ein Gewicht  $w(e)$ . Das Gewicht eines Pfades von  $A_i$  nach  $A_j$  sei das Produkt der Gewichte der Kanten.

Ein Pfadssystem  $\mathcal{P}$  ist eine Permutation  $\sigma \in S_n$  und ein  $n$ -Tupel von Pfaden  $(P_1, \dots, P_n)$ , so dass  $P_i$  ein Pfad von  $A_i$  nach  $B_{\sigma(i)}$  ist.

Eine Pfadmenge heißt knotendisjunkt (vertex disjoint), wenn keine zwei Pfade einen gemeinsamen Knoten haben. Das Vorzeichen einer Pfadmenge ist das Vorzeichen der zugehörigen Permutation, das Gewicht der Pfadmenge ist das Produkt der Pfadgewichte.

Definiere außerdem

$$m_{ij} := \sum_{P \text{ Pfad von } A_i \text{ zu } B_j} \text{weight}(P), \quad M := (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}.$$

**Lemma 2.9** (Gessel-Viennot-Lindström): Mit der obigen Notation ist

$$\det M = \sum_{\mathcal{P} \text{ knotendisj. Pfadmengen}} \text{sign}(\mathcal{P}) \text{weight}(\mathcal{P}).$$

*Anmerkung:* Betrachte einen bipartiten Graphen mit dem Gewicht  $m_{ij}$  der Kante von  $A_i$  nach  $B_j$ , alle Kanten von links nach rechts.

Dann besagt das Lemma

$$\det M = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) m_{1\sigma(1)} \cdots m_{n\sigma(n)},$$

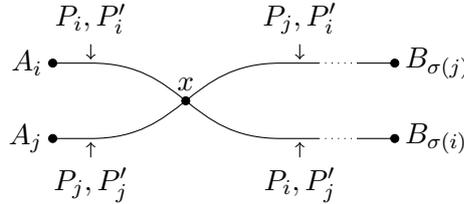
die übliche Determinantenformel ist also ein Spezialfall dieses Lemmas.

*Beweis:*

$$\begin{aligned} \det M &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^n \left( \sum_{P_i: A_i \rightarrow B_{\sigma(i)}} \text{weight}(P_i) \right) \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \sum_{\substack{(P_1, \dots, P_n) \\ P_i: A_i \rightarrow B_{\sigma(i)}}} \prod_{i=1}^n \text{weight}(P_i) \\ &= \sum_{\mathcal{P} \text{ Pfadsystem}} \text{sign}(\mathcal{P}) \text{weight}(\mathcal{P}). \end{aligned}$$

Wir müssen die Eigenschaft der Knotendisjunktheit noch einbringen. Definiere eine Involution  $f$  auf der Menge von Pfadsystemen. Sei  $\mathcal{P} = (\sigma, (P_1, \dots, P_n))$ .

- Falls  $\mathcal{P}$  knotendisjunkt ist, setze  $f(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$ .
- Ansonsten:
  1. Wähle  $i$  minimal, so dass sich  $P_i$  mit einem anderen Pfad schneidet.
  2. Wähle einen Knoten  $x$  von  $P_i$  minimal (bezüglich der Distanz von der Quelle des Pfads), so dass  $P_i$  in  $x$  einen anderen Pfad schneidet.
  3. Wähle  $j > i$  minimal, so dass sich  $P_j$  mit  $P_i$  in  $x$  schneidet.



$P'_i$  ist also zwischen  $A_i$  und  $x$  gleich  $P_i$ , danach zwischen  $x$  und  $B_{\sigma(j)}$  gleich  $P_j$ , und umgekehrt. Außerdem  $P'_k = P_k$  für  $k \notin \{i, j\}$ . Dann setze

$$f(\mathcal{P}) = ((i, j) \circ \sigma, (P'_1, \dots, P'_n)).$$

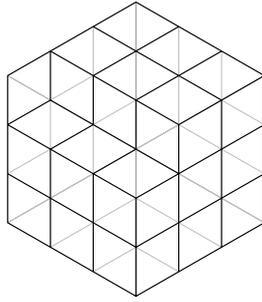
Es gilt

$$\text{sign}(f(\mathcal{P})) = -\text{sign}(\mathcal{P}), \quad \text{weight}(f(\mathcal{P})) = \text{weight}(\mathcal{P}),$$

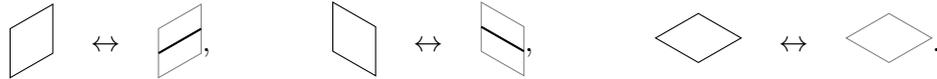
und  $f$  ist eine Involution. □

*Beispiel* (Rhombische Tilings eines Hexagons): Wie viele mögliche Konfigurationen gibt es, je zwei benachbarte Dreiecke in dem Hexagon zu Rhomben zu kombinieren, so dass das Hexagon vollständig abgedeckt ist?

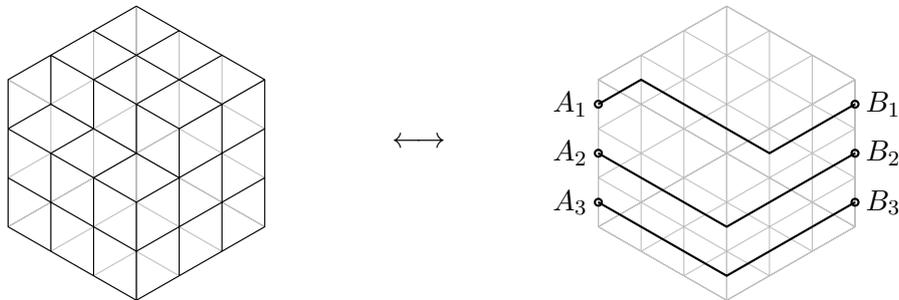
*Beispiel:* Ein mögliches Tiling ist folgendes:



Es gibt eine Bijektion zwischen den Konfigurationen zu den knotendisjunkten (kreuzungsfreien) Pfadmengen von  $\{A_1, A_2, A_3\}$  nach  $\{B_1, B_2, B_3\}$  (die Identitätspermutation ist die einzige Permutation, die zu knotendisjunkten Pfaden führt), mit der Abbildungsvorschrift

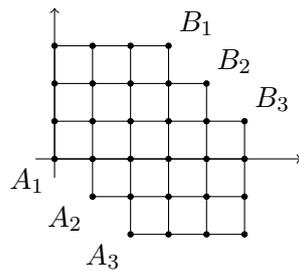


*Beispiel:* Das obenstehende Tiling wird auf diese Pfade  $A_i \rightarrow B_i$  abgebildet:



Das Gewicht ist immer 1. Laut dem Gessel-Viennot Lemma ist

$$\det M = \sum_{\substack{\text{knotendisj.} \\ \text{Pfadmengen}}} 1 = \text{Anzahl knotendisjunkter Pfadmengen} \\ = \text{Anzahl rhombischer Tilings.} \\ m_{ij} = \text{Anzahl Pfade von } A_i \text{ nach } B_j \text{ (ohne Einschränkungen)}$$



Die Koordinaten in diesem Koordinatensystem sind dann

$$A_i = (i - 1, 1 - i) \\ B_j = (n + j - 1, n - j + 1) \\ B_j - A_i = (n + j - i, n - j + i).$$

Von den  $2n$  Schritten sind  $n + j - i$  nach rechts. Damit ist

$$m_{ij} = \binom{2n}{n + j - i},$$

und die Anzahl der Konfigurationen ist daher

$$\det \left( \binom{2n}{n+j-i} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{(2n+j)^n}{(n+j)^n}.$$

Hinweis zur letzten Umformung: leichter ist

$$\det \left( \binom{x}{n+j-i} \right) = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{(x+j)^n}{(n+j)^n}.$$

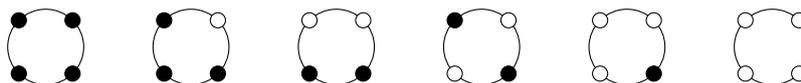
# Kapitel 3

## Enumeration von Mustern

### 3.1 Symmetrien und Muster

*Beispiel* (Halsketten): Wir betrachten Halsketten mit  $n$  Perlen in  $r$  Farben.

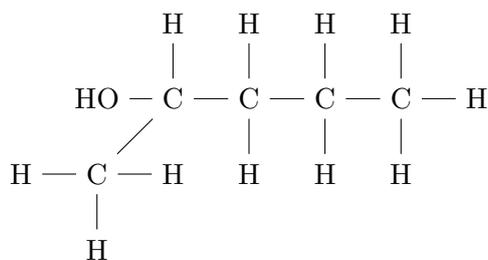
Für  $n = 4$  und  $r = 2$  gibt es beispielsweise 6 verschiedene Ketten (Rotationen sind erlaubt).



Der Einfachheit halber ist Spiegelung verboten. Wir wollen die Anzahl der verschiedenen Muster (Konfigurationen) zählen.

*Beispiel* (Würfel): Wir färben die sechs Flächen eines Würfels in  $r$  Farben. Erlaubt sind Rotationen an allen drei Symmetrieachsen.

*Beispiel* (Alkohole): Wir zählen die Anzahl einfacher azyklischer Alkohole. Diese Alkohole haben eine HO-Gruppe sowie C- und H-Moleküle, siehe Beispielabbildung.



Wieder gibt es einige Symmetrien.

**Definition 3.1** (Gruppenwirkung (Group Action)): Sei  $X$  eine Menge,  $G$  eine Gruppe. Eine Gruppenwirkung ist ein Gruppenhomomorphismus von  $G$  nach  $S(X)$ ,

$$S(X) = \{\pi : X \rightarrow X \mid \pi \text{ bijektiv}\}.$$

Sei  $\pi$  diese Wirkung,  $g \in G$ ,  $x \in X$ .  $\pi(g)$  ist eine Permutation von  $X$ ,  $\pi(g)(x)$  ist auch ein Element aus  $X$ . Wir schreiben der Einfachheit halber  $gx$  für  $\pi(g)(x)$ .

**Definition 3.2:** Sei  $G$  eine Gruppe, die auf  $x$  operiert. Dann definiere für  $x \in X$  den Orbit von  $x$  unter  $G$ ,

$$\bar{x} = \{gx \mid g \in G\}$$

und den Stabilisator von  $x$

$$G_x = \{g \in G \mid gx = x\}.$$

Umgekehrt sind die Fixpunkte von  $g \in G$

$$X_g = \{x \in X \mid gx = x\}.$$

Für  $x, y$  definiere die Äquivalenzrelation  $x \sim_G y \Leftrightarrow \exists g \in G : gx = y$ . Die Menge der Äquivalenzklassen ist

$$X / \sim_G = \{\bar{x} \mid x \in X\}.$$

*Anmerkung:*  $\sim_G$  ist eine Äquivalenzrelation.  $\bar{x}$  ist die Äquivalenzklasse von  $x$ .

Wir betrachten im Folgenden eine Gruppe  $G$ , die auf einer Menge  $N$  operiert. Für eine Menge  $R$  von Eigenschaften (oben: Farben) sei

$$F := \{f \mid N \rightarrow R\}.$$

Wir definieren eine zusätzliche Gruppenwirkung auf  $F$ : Für  $g \in G, f \in F$  definieren wir  $gf \in F$  durch

$$gf := f \circ g^{-1}, \quad gf(x) = f(g^{-1}(x)).$$

Das ist ein Homomorphismus: Sei  $g, g' \in G$ . Dann ist

$$\begin{aligned} (gg')f &= f \circ (gg')^{-1} = f \circ (g'^{-1} \cdot g^{-1}) \\ &= (f \circ g^{-1}) \circ g'^{-1} = g'(f \circ g^{-1}) \\ &= g'(gf). \end{aligned}$$

$$f \sim_G f' \Leftrightarrow \exists g \in G : gf = f' \Leftrightarrow f = f' \circ g^{-1}.$$

Uns interessiert die Anzahl der Orbits von  $F$  in Bezug auf diese Wirkung.

Beobachtung zu Gruppenwirkungen: Für eine endliche Gruppe  $G$ , die auf einer endlichen Menge  $X$  operiert, gilt

$$\sum_{x \in X} |G_x| = \sum_{x \in X} \sum_{\substack{g \in G \\ gx=x}} 1 = \sum_{\substack{g \in G, x \in X \\ gx=x}} 1 = \sum_{g \in G} \sum_{\substack{x \in X \\ gx=x}} 1 = \sum_{g \in G} |X_g|.$$

**Lemma 3.1:** Sei  $G$  eine endliche Gruppe, die auf einer endlichen Menge  $X$  operiert. Für  $x \in X$  gilt

$$|\bar{x}| = \frac{|G|}{|G_x|} \quad (= [G : G_x]).$$

*Beweis:* Betrachte die Folge  $(gx)_{g \in G}$  ( $|G|$  Elemente).

Wann gilt  $gx = hx$  für  $g, h \in G$ ? Es ist

$$gx = hx \Leftrightarrow h^{-1}gx = x \Leftrightarrow h^{-1}g \in G_x.$$

Jedes Element  $gx$  wird also genau  $|G_x|$  mal in der Folge erreicht. Also

$$|G| = |\bar{x}| \cdot |G_x|. \quad \square$$

**Satz 3.2** (Burnsides Lemma): Sei  $G$  eine endliche Gruppe, die auf einer endlichen Menge  $X$  operiert. Dann gilt

$$|X/\sim| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X_g|.$$

Der linke Ausdruck ist dabei die Anzahl der Orbits bzw. Muster, der rechte die durchschnittliche Anzahl von Fixpunkten.

*Beweis* (Durch Frobenius): Für die Summe gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X_g| &= \frac{1}{|G|} \sum_{x \in X} |G_x| = \sum_{x \in X} \frac{1}{|\bar{x}|} \\ &= \sum_{M \in X/\sim} \sum_{x \in M} \frac{1}{|\bar{x}|} = \sum_{M \in X/\sim} \sum_{x \in M} \frac{1}{|M|} = \sum_{M \in X/\sim} 1 = |X/\sim|. \quad \square \end{aligned}$$

Wir können die eingangs formulierten Fragen also durch Berechnen von  $|X_g|$  für alle  $g \in G$  beantworten.

*Beispiel* (Halsketten, Teil 2):  $G = \langle \zeta \rangle$ , wobei

$$\zeta = \exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right)$$

primitive  $n$ -te Einheitswurzel. Weiters  $N = \langle \zeta \rangle$  alle  $n$ -ten Einheitswurzeln.

$G$  operiert auf  $N$  durch komplexe Multiplikation, dh. Rotation,

$$F = \{f : N \rightarrow [r]\}.$$

$G$  operiert auf  $F$  wie oben definiert.

Für jedes  $g \in G$  müssen wir  $|F_g|$  bestimmen.

- Fall  $g = 1$ :

$$|F_1| = |\{f : N \rightarrow [r] \mid f = f\}| = r^1.$$

- Allgemeiner Fall:  $g = \zeta^k$ ,

$$\begin{aligned} F_g &= \{f : N \rightarrow [r] \mid f \circ g^{-1} = f\} \\ &= \{f : N \rightarrow [r] \mid x = g^{-1}(y) \text{ für zwei } x, y \in N, \text{ dann } f(x) = f(y)\}. \end{aligned}$$

Wann gilt  $x = g^{-1}y$ ? Wir können  $x, y$  schreiben als

$$x = \zeta^k, \quad y = \zeta^\ell.$$

$$x = g^{-1}y \Leftrightarrow \zeta^k = \zeta^{-a}\zeta^\ell \Leftrightarrow k \equiv \ell - a \pmod{n} \Leftrightarrow a \equiv \ell - k \pmod{n}.$$

Falls

$$x = (-g)^b y,$$

dann  $f(x) = f(y)$ . Wir brauchen auch  $f(x) = f(y)$ , falls  $ba \equiv \ell - k \pmod{n}$  für ein  $b$ .

Setze  $d = \text{ggT}(n, a)$ . Dann  $d \mid \ell - k$ .

$$b \cdot \frac{a}{d} \equiv \frac{\ell - k}{d} \pmod{\frac{n}{d}} \Rightarrow b \equiv \left(\frac{a}{d}\right)^{-1} \frac{\ell - k}{d} \pmod{\frac{n}{d}}.$$

Also: Falls  $k \equiv \ell \pmod{d}$ , dann finden wir  $b$ , so dass  $x \equiv (g^{-1})^b(y)$ , dh.  $f(x) = f(y)$ .

Wir dürfen nur Farben für  $\zeta^0, \zeta^1, \dots, \zeta^{d-1}$  aussuchen,

$$|F_g| = r^{\text{ggT}(n,a)}, \quad g = \zeta^a.$$

Die Anzahl der Patterns ist also gegeben durch

$$\begin{aligned} \text{Anzahl Muster} &= \frac{1}{n} \sum_{g \in G} |F_g| = \frac{1}{n} \sum_{a=0}^{n-1} |F_{\zeta^a}| \\ &= \frac{1}{n} \sum_{a=0}^{n-1} r^{\text{ggT}(n,a)} = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \sum_{\substack{0 \leq a < n \\ \text{ggT}(a,n)=d}} r^d \end{aligned}$$

Sei  $a = b \cdot d$ .

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{n} \sum_{d|n} r^d \sum_{\substack{0 \leq b < \frac{n}{d} \\ \text{ggT}(b,n/d)=1}} 1 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{d|n} r^d \varphi\left(\frac{n}{d}\right). \end{aligned}$$

Überprüfung für  $n = 4, r = 2$ :

$$\frac{1}{4} (2^1 \varphi(4) + 2^2 \varphi(2) + 2^4 \varphi(1)) = \frac{1}{4} (4 + 4 + 16) = \frac{24}{4} = 6.$$

## 3.2 Pólya-Counting

Soll einfacher und allgemeiner werden als obige Methode.

Für jedes  $r \in R$  führen wir eine Variable  $x_r$  ein; das Gewicht einer Färbung  $f : N \rightarrow R$  ist definiert als

$$w(f) = \prod_{j \in N} x_{f(j)}.$$

Angenommen  $f \sim_G f'$ , dh.  $f' = f \circ g^{-1}$ .

$$w(f') = \prod_{j \in N} x_{f'(j)} = \prod_{j \in N} x_{f(g^{-1}(j))} = \prod_{j \in N} x_{f(j)} = w(f).$$

Für jedes Muster  $M \in F/\sim$  ist  $w(f)$  gleich für alle  $f \in M$ . Definiere also das Gewicht eines Musters  $M$  als

$$w(M) = w(f).$$

Uns interessiert die (endliche) erzeugende Funktion

$$\sum_{M \in F/\sim} w(M).$$

Extrahiere  $|F/\sim|$  durch  $x_r = 1$  für alle  $r$ , oder beispielsweise die Anzahl der Halsketten mit zwei roten Perlen als Koeffizient von  $x_{\text{rot}}^2$  in

$$\sum_{M \in F/\sim} w(M).$$

**Definition 3.3** (Zyklenindex, Cycle Index): Sei  $G$  eine endliche Gruppe, die auf  $N$  operiert,  $|N| = n$ , Unbestimmte  $(z_1, \dots, z_n)$ . Definiere den Zyklenindex

$$Z(G; z_1, \dots, z_n) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} z_1^{c_1(g)} \dots z_n^{c_n(g)}.$$

Dabei bezeichnet  $c_1, \dots, c_n$  den Zyklentyp der Permutation  $g$ ,  $c_j(g)$  ist also die Anzahl der  $j$ -Zyklen der Permutation  $g$  in  $N$ .

**Satz 3.3** (Pólya, Redfield): Die endliche Gruppe  $G$  wirke auf der endlichen Menge  $N$  und damit auf  $F := \{f : N \rightarrow R\}$ , alle Muster  $M \in F/\sim_G$  seien endlich. Dann gilt

$$\sum_{M \in F/\sim} w(M) = Z(G; \sum_{r \in R} x_r, \sum_{r \in R} x_r^2, \dots, \sum_{r \in R} x_r^n).$$

Insbesondere ist

$$|F/\sim| = Z(G; |R|, |R|, \dots, |R|).$$

*Beweis:* Sei  $M \in F/\sim$ .  $G$  operiert auf  $M$ . Burnsid's Lemma ergibt für  $M$

$$1 = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |M_g| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{\substack{f \in M \\ f \circ g^{-1} = f}} 1.$$

Multiplikation mit  $w(M)$  ergibt

$$w(M) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{\substack{f \in M \\ f \circ g^{-1} = f}} w(f).$$

$$\sum_{M \in F/\sim} w(M) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{M \in F/\sim} \sum_{\substack{f \in M \\ f \circ g^{-1} = f}} w(f) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{\substack{f \in F \\ f \circ g^{-1} = f}} w(f).$$

Sei  $g \in G$  fix. Sei  $c_1(g), \dots, c_n(g)$  der Zyklentyp von  $g$ . Was bedeutet  $f \circ g^{-1} = f$ ? Sei  $(a, ga, ga^2, \dots, g^{j-1}a)$  ein  $j$ -Zyklus von  $g$ . Die Bedingung  $f \circ g^{-1} = f$  bedeutet, dass

$$f(a) = f(ga) = f(g^2a) = \dots$$

$f$  ist also konstant auf jedem Zyklus. Wähle also eine Farbe für jeden Zyklus.

$$\sum_{\substack{f \in F \\ f \circ g^{-1} = f}} w(f) = \left( \sum_{r \in R} x_r \right)^{c_1} \cdot \left( \sum_{r \in R} x_r^2 \right)^{c_2} \cdots \left( \sum_{r \in R} x_r^n \right)^{c_n}.$$

$$\sum_{M \in F/\sim} w(M) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \left( \sum_{r \in R} x_r \right)^{c_1} \left( \sum_{r \in R} x_r^2 \right)^{c_2} \cdots \left( \sum_{r \in R} x_r^n \right)^{c_n}. \quad \square$$

*Beispiel* (Halsketten, Teil 3): Wir brauchen

$$Z(G, z_1, \dots, z_n) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} z_1^{c_1(g)} \dots z_n^{c_n(g)}.$$

Sei  $g = \zeta^a \in G$ . Ein Zyklus von  $g$  hat die Form

$$\left( \zeta^k, \zeta^{k+a}, \zeta^{k+2a}, \dots, \zeta^{k+(d-1)a} \right)$$

mit

$$\zeta^k = \zeta^{k+da} \Leftrightarrow k + da \equiv k \pmod{n} \Leftrightarrow da \equiv 0 \pmod{n},$$

$d > 0$  minimal.

Wir sehen bereits, dass

$$c_d(g) = \frac{n}{d}, \quad c_j = 0 \text{ für } j \neq d,$$

$\frac{n}{d}$  Zyklen der Länge  $d$  und sonst nichts. Also weiters

$$\zeta^k = \zeta^{k+da} \Leftrightarrow n \mid da \Leftrightarrow \frac{n}{\text{ggT}(n, a)} \mid d \cdot \frac{a}{\text{ggT}(n, a)} \Leftrightarrow \frac{n}{\text{ggT}(n, a)} \mid d \Leftrightarrow d = \frac{n}{\text{ggT}(n, a)}.$$

Also erhalten wir

$$Z(G) = \frac{1}{n} \sum_{a=0}^{n-1} z_{\frac{n}{\text{ggT}(n, a)}}^{\frac{\text{ggT}(n, a)}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{d \mid n} z_d^{n/d} \sum_{\substack{0 \leq a < n \\ \text{ggT}(n, a) = \frac{n}{d}}} 1 = \frac{1}{n} \sum_{d \mid n} z_d^{n/d} \varphi(d).$$

Folglich

$$|F / \sim| = \frac{1}{n} \sum_{d \mid n} r^{n/d} \varphi(d).$$

*Beispiel* (Würfel, Teil 2): Zählen die Drehungen eines Würfels nach ihren Drehachsen:

- 1 Identität,  $c_1 = 6$
- 3 gegenüberliegende Seiten
  - Drehung  $90^\circ$ :  $c_1 = 2, c_4 = 1$ .
  - Drehung  $270^\circ$ :  $c_1 = 2, c_4 = 1$ .
  - Drehung  $180^\circ$ :  $c_1 = 2, c_2 = 2$ .
- 6 gegenüberliegende Kanten
  - Drehung  $180^\circ$ :  $c_2 = 3$
- 4 gegenüberliegende Ecken
  - Drehung  $120^\circ$ :  $c_3 = 2$
  - Drehung  $240^\circ$ :  $c_3 = 2$

Berechnung:

$$Z(G, z_1, \dots, z_n) = \frac{1}{24} (z_1^6 + 6z_1^2 z_4 + 3z_1^2 z_2^2 + 6z_2^3 + 8z_3^2).$$

*Beispiel* (Alkohole, Teil 2): Wir betrachten weiterhin einfache azyklische Alkohole, allerdings abstrahiert als ternären Wurzelbaum (jeder Knoten ist entweder Blatt oder hat drei Kinder). Die Reihenfolge der Kinder ist irrelevant (Baum ist nicht planar). Die OH-Gruppe ist die Wurzel, Blätter sind H-Moleküle, innere Knoten sind C-Moleküle.

Wir setzen also

$$\begin{aligned} N &= \{1, 2, 3\} \\ G &= S_3 \\ R &= \{T \mid T \text{ nicht-planarer ternärer Wurzelbaum}\} \end{aligned}$$

Wir haben also unendlich viele Farben und weisen einem Alkohol als Färbung die Farben seiner drei Kinder zu.

Zu jedem  $T \in R$  definieren wir

$$x_T = x^{\# \text{ Nicht-Blätter in } T},$$

dh. falls ein Alkohol  $f$  den Bäumen  $T_1, T_2, T_3$  entspricht, haben wir

$$w(f) = x_{T_1} x_{T_2} x_{T_3} = x^{\# \text{ Nicht-Blätter in } T_1+T_2+T_3} = x^{(\# \text{ Nicht-Blätter in } T)-1}.$$

$$\sum_{M \text{ Muster}} w(M) = Z(G, \dots)$$

Sei  $A(x)$  die erzeugende Funktion von nicht-planaren ternären Wurzelbäumen,

$$A(x) = \sum_{k \geq 0} (\# \text{ n.-p. t. W.-bäume mit } k \text{ Nicht-Blättern}) \cdot x^k.$$

$$1 + x \cdot \sum_{M \text{ Muster}} w(M) = A(x),$$

wobei 1 für den Baum mit Ordnung 1 dazukommt.

$$Z(S_3, z_1, z_2, z_3) = \frac{1}{6} (z_1^3 + 3 \cdot z_1 z_2 + 2 \cdot z_3)$$

mit Summanden für id, 2-Zyklen und 3-Zyklen, resp. Pólya ergibt

$$\begin{aligned} A(x) &= 1 + x \sum_M w(M) \\ &= 1 + xZ\left(S_3, \sum_{T \in R} x_T, \sum_{T \in R} x_T^2, \sum_{T \in R} x_T^3\right) \\ &= 1 + xZ(S_3, A(x), A(x^2), A(x^3)) \\ &= 1 + \frac{x}{6} (A(x)^3 + 3A(x)A(x^2) + 2A(x^3)) \end{aligned}$$

Wir haben also eine Funktionalgleichung für  $A(x)$  erhalten. Einzelne Koeffizienten kann man rekursiv extrahieren, auch erhält man asymptotische Information.

Alternativ kann man auch einen rein auf erzeugenden Funktionen basierten Ansatz wählen ("symbolische Methode").

Sei  $\mathcal{A}$  die Menge aller non-planaren  $d$ -adischen Wurzelbäume. Sei  $A_n$  die Anzahl solcher Bäume mit  $n$  inneren Knoten (d.h., Nicht-Blättern).

$$A(x) = \sum_{n \geq 0} A_n x^n.$$

Wir betrachten Multisets von Bäumen und zählen die Kardinalität der Multisets mit einer neuen Variable  $u$ . Es sei  $A_{nk}$  die Anzahl von Multisets der Kardinalität  $k$  über  $\mathcal{A}$  mit insgesamt  $n$  inneren Knoten. Dann gilt für die bivariate erzeugende Funktion

$$\begin{aligned} \sum_{n,k \geq 0} A_{nk} u^k x^n &= \prod_{T \in \mathcal{A}} (1 - ux^{\#\text{Innere Knoten von } T})^{-1} \\ &= \prod_{m=0}^{\infty} \prod_{\substack{T \in \mathcal{A} \\ T \text{ hat } m \text{ innere Knoten}}} (1 - ux^m)^{-1} = \prod_{m=0}^{\infty} (1 - ux^m)^{-A_m} \end{aligned}$$

Wir können nun die Elemente von  $\mathcal{A}$  folgendermaßen symbolisch darstellen:

$$\mathcal{A} = \bullet + \begin{array}{c} \bullet \\ / \quad \backslash \\ \mathcal{A} \quad \mathcal{A} \cdots \mathcal{A} \end{array}$$

Damit ergibt sich (wir benötigen also Multisets der Kardinalität  $d$ )

$$\begin{aligned} A(x) &= 1 + x[u^d] \prod_{n=0}^{\infty} (1 - ux^n)^{-A_n} \\ &= 1 + x[u^d] \exp \left( \sum_{n=0}^{\infty} -A_n \log(1 - ux^n) \right) \end{aligned}$$

Wegen  $-\log(1 - z) = \sum_{k \geq 1} \frac{z^k}{k}$ :

$$\begin{aligned} &= 1 + x[u^d] \exp \left( \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sum_{k \geq 1} \frac{(ux^n)^k}{k} \right) \\ &= 1 + x[u^d] \exp \left( \sum_{k \geq 1} \frac{u^k}{k} \sum_{n \geq 0} A_n (x^k) x^n \right) \\ &= 1 + x[u^d] \exp \left( \sum_{k \geq 1} \frac{u^k}{k} A(x^k) \right) \end{aligned}$$

Setze  $d = 3$  für unsere Anwendung.

$$\begin{aligned} A(x) &= 1 + x[u^3] \exp \left( \frac{u}{1} A(x) + \frac{u^2}{2} A(x^2) + \frac{u^3}{3} A(x^3) \right) \\ &= 1 + \frac{x}{6} (A(x)^3 + 3A(x)A(x^2) + 2A(x^3)) \end{aligned}$$

# Kapitel 4

## Ramsey-Theorie

### 4.1 Fundamentale Ramsey-Sätze

*Beispiel* (“Übliches Spielzeugbeispiel”): Eine Party mit 6 Personen; dann gibt es entweder drei Personen darunter, die sich gegenseitig kennen, oder drei Personen, die sich gegenseitig nicht kennen.

Äquivalent dazu: Sei  $G$  ein Graph mit 6 Knoten. Dann enthält  $G$  eine 3-Clique ( $K_3$  als Teilgraph) oder eine 3-Anticlique (das Komplement von  $G$  enthält  $K_3$ ). Dabei ist  $K_n$  der vollständige Graph mit  $n$  Knoten.

Äquivalent dazu: Färbe die Kanten von  $K_6$  jeweils blau oder rot. Dann gibt es immer entweder ein rotes oder ein blaues Dreieck.

**Definition 4.1:** Sei  $s, t \geq 2$ . Dann ist  $R(s, t)$  definiert als kleinstes  $n \in \mathbb{Z}$ , so dass jeder Graph mit  $n$  Knoten eine  $s$ -Clique oder eine  $t$ -Anticlique enthält (Ramsey-Zahl). Abkürzend ist  $R(s, s) = R(s)$ . Farb-Bezeichnung:  $s$  blau,  $t$  rot.

*Beispiel:* Äquivalent zu obigen Beispielen ist also  $R(3, 3) \leq 6$ .

*Beweis:* Wähle einen Knoten  $x$  in  $K_6$ . OBdA gehen von  $x$  drei blaue Kanten aus, zu Knoten  $v_1, v_2, v_3$ . Falls  $K_6$  kein blaues Dreieck enthält, dann müssen  $v_1v_2, v_2v_3, v_3v_1$  rot sein, fertig.

**Satz 4.1** (Erdős, Szekeres 1935): Sei  $s, t \geq 2$ . Dann gilt

$$R(s, t) \leq R(s - 1, t) + R(s, t - 1).$$

Insbesondere gilt  $R(s, t) < \infty$  und

$$R(s, t) \leq \binom{t + s - 2}{t - 1}.$$

*Beweis:* Betrachte zuerst den Fall  $s = 2$ . Offensichtlich gilt

$$R(2, t) = t = \binom{t}{1},$$

denn entweder es gibt eine blaue Kante ( $K_2$  blau), oder alle Kanten sind rot, das enthält  $K_t$  für  $n \geq t$ .

Induktion nach  $s + t$ : Angenommen,

$$R(s-1, t) \leq \binom{s+t-3}{s-2}, \quad R(s, t-1) \leq \binom{s+t-3}{s-1}.$$

Sei  $n = R(s-1, t) + R(s, t-1)$  und betrachte  $K_n$ . Sei  $x$  ein Knoten von  $K_n$  und  $K_n$  blau und rot gefärbt. Wir suchen also einen blauen  $K_s$  oder einen roten  $K_t$  in  $K_n$ . Der Grad von  $x$  ist

$$\deg(x) = n - 1 = R(s-1, t) + R(s, t-1) - 1.$$

Sei  $n_1$  die Anzahl der zu  $x$  inzidenten blauen Kanten,  $n_2$  analog die der roten.

Es kann nicht  $n_1 < R(s-1, t)$  und  $n_2 < R(s, t-1)$  sein, denn dann wäre

$$n_1 + n_2 \leq R(s-1, t) - 1 + R(s, t-1) - 1 = n - 2,$$

Widerspruch zu  $\deg(x) = n - 1$ .

OBdA sei  $n_1 \geq R(s-1, t)$ . Der von den Nachbarn von  $x$  aufgespannte Graph enthält dann entweder einen blauen  $K_{s-1}$  (blaue Kanten zu  $x$  hinzufügen für blauen  $K_s$ ) oder einen roten  $K_t$ .

Also gilt

$$R(s, t) \leq n = R(s-1, t) + R(s, t-1) \leq \binom{s+t-3}{s-2} + \binom{s+t-3}{s-1} = \binom{s+t-2}{s-1}. \quad \square$$

Im Speziellen gilt

$$R(s, s) \leq \binom{2s-2}{s-1} \leq \frac{2^{2s-2}}{\sqrt{s}}.$$

Wir werden (im folgenden Kapitel) zeigen

$$R(s, s) > 2^{s/2}.$$

**Definition 4.2:** Sei  $\ell \geq 2$ ,  $s_1, \dots, s_\ell \geq 2$ . Dann ist  $R_\ell(s_1, \dots, s_\ell)$  definiert als kleinstes  $n \in \mathbb{Z}$ , so dass es für jede Färbung des  $K_n$  mit  $\ell$  Farben ein  $j \in \{1, \dots, \ell\}$  gibt, sodass es einen  $j$ -gefärbten Teilgraphen  $K_{s_j}$  gibt.

Die in Definition 4.1 definierte Ramsey-Zahl  $R(s, t)$  ist also nach dieser Notation  $R_2(s, t)$ .

**Korollar 4.2:** Sei  $\ell \geq 2$ ,  $s_1, \dots, s_\ell \geq 2$ . Dann ist  $R_\ell(s_1, \dots, s_\ell)$  endlich.

*Beweis:* Induktion nach  $\ell$ .

- Basis  $\ell = 2$  ist bekannt (Satz 4.1).
- Es gilt

$$R_{\ell+1}(s_1, \dots, s_{\ell+1}) \leq R_\ell(R_2(s_1, s_2), s_3, \dots, s_{\ell+1}).$$

Wir identifizieren zunächst zwei Farben, dann  $K_{s_j}$  der Farbe  $j$  für  $j \geq 3$  (gewonnen) oder  $R_2(s_1, s_2)$ -elementiger vollständiger Graph der identifizierten Farbe, der anschließend aufgeteilt wird.

Damit ist die Behauptung bewiesen.

**Satz 4.3** (Erdős, Szekeres, 1935 + 1960): Seien  $k, \ell \geq 2$ .

1. Jede Menge mit mindestens

$$\binom{k + \ell - 4}{k - 2} + 1$$

Punkten in  $\mathbb{R}^2$  in allgemeiner Lage (keine zwei Punkte mit gleicher  $x$ -Koordinate) enthält ein  $k$ -Cup oder ein  $\ell$ -Cap. (Eine Menge von Punkten  $(x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k)$  in allgemeiner Lage heißt  $k$ -Cup, falls es eine konvexe Funktion  $h$  gibt, so dass  $y_j = h(x_j)$ . Analog  $\ell$ -Cap mit konkaver Funktion).

2. Es gibt eine Menge mit

$$\binom{k + \ell - 4}{k - 2}$$

Punkten in  $\mathbb{R}^2$  in allgemeiner Lage, die weder  $k$ -Cup noch  $\ell$ -Cap enthält.

*Beweis:* Wir setzen

$$\varphi(k, \ell) = \binom{k + \ell - 4}{k - 2}$$

und halten fest, dass  $\varphi(k, \ell) = \varphi(k - 1, \ell) + \varphi(k, \ell - 1)$ .

1. Sei  $k = 2$ . Zwei beliebige Punkte bilden bereits einen 2-Cup, und

$$\binom{2 + \ell - 4}{0} + 1 = 2.$$

Sei nun  $k > 2, \ell > 2$ . Angenommen, jede Menge von  $\varphi(k - 1, \ell) + 1$  Punkten enthält einen  $(k - 1)$ -Cup oder einen  $\ell$ -Cap, und jede Menge von  $\varphi(k, \ell - 1) + 1$  Punkten enthält einen  $k$ -Cup oder einen  $(\ell - 1)$ -Cap (Induktion).

Sei  $S$  eine Menge von Punkten mit Kardinalität  $\varphi(k, \ell) + 1$ . Angenommen,  $S$  enthält weder  $k$ -Cup noch  $\ell$ -Cap. Definiere  $L$  als die Menge der letzten Punkte von  $(k - 1)$ -Cups in  $S$ .  $S \setminus L$  kann also keinen  $(k - 1)$ -Cup enthalten (sofern es kein  $k$ -Cup in  $S$  war, wäre das letzte Element in  $L$  und daher aus  $S$  entfernt worden).  $S \setminus L$  enthält keinen  $\ell$ -Cap. Also muss

$$|S \setminus L| \leq \varphi(k - 1, \ell).$$

$$|L| = |S| - |S \setminus L| \geq \varphi(k, \ell) + 1 - \varphi(k - 1, \ell) = \varphi(k, \ell - 1) + 1.$$

Also muss  $L$  ein  $(\ell - 1)$ -Cap enthalten, ansonsten gäbe es einen  $k$ -Cup in  $S$ . Sei  $q_1, \dots, q_{\ell-1}$  ein  $(\ell - 1)$ -Cap in  $L$ . Da  $q_1 \in L$ , muss  $q_1$  das letzte Element eines  $(k - 1)$ -Cups sein,  $p_1, \dots, p_{k-1} = q_1$ .

Falls die Steigung von  $(p_{k-2}, q_1)$  kleiner ist als von  $(q_1, q_2)$ , haben wir einen  $k$ -Cup

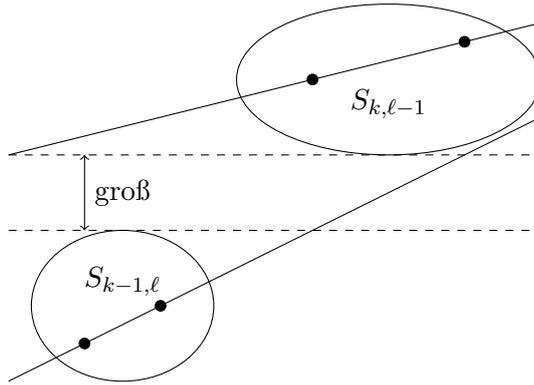
$$p_1, \dots, p_{k-1} = q_1, q_2,$$

Widerspruch. Andernfalls haben wir einen  $\ell$ -Cap

$$p_{k-2}, p_{k-1} = q_1, \dots, q_{\ell-1},$$

Widerspruch.

2. Wir konstruieren rekursiv Mengen  $S_{k,\ell} = \{(1, y_1), \dots, (n, y_n)\}$  mit  $n = \varphi(k, \ell)$ , die weder einen  $k$ -Cup noch einen  $\ell$ -Cap enthalten.



Zwei Mengen:  $S_{k-1, \ell}$  sowie, nach rechts und weit oben verschoben,  $S_{k, \ell-1}$ . Der vertikale Abstand muss so groß gewählt werden, dass die obere rechte Menge oberhalb aller Geraden durch irgendwelche zwei Punkte der linken unteren Menge liegt (und umgekehrt).

Angenommen, diese Vereinigung der Punktemengen enthält einen  $k$ -Cup. Da die linke untere Menge nach Voraussetzung keinen  $(k-1)$ -Cup enthält, müssen zumindest die beiden letzten Punkte in der oberen rechten Menge sein. Dann muss der gesamte  $k$ -Cup oberhalb der Gerade durch diese Punkte sein. Alle Punkte des  $k$ -Cups müssen dann oberhalb dieser Linie sein, also in der oberen rechten Menge. Widerspruch zu den Annahmen.  $\square$

**Korollar 4.4:** Sei  $S$  eine Menge von

$$\binom{2k-4}{k-2} + 1$$

Punkten in allgemeiner Lage. Dann enthält  $S$  ein konvexes  $k$ -Eck.

*Beweis:* Es gibt einen  $k$ -Cup (oder  $k$ -Cap), Schließen ergibt ein  $k$ -Eck.  $\square$

## 4.2 Ramsey-Theorie in $\mathbb{N}$

**Satz 4.5** (Hilbert 1892): Sei  $\mathbb{N}$  mit  $k$  Farben gefärbt und  $\ell \geq 1$ . Dann gibt es einen monochromatischen  $\ell$ -Würfel, der unendlich oft verschoben in derselben Farbe auftritt.

Hier heißt eine Teilmenge  $S \subseteq \mathbb{N}$  ein  $\ell$ -Würfel, wenn es  $s_0, s_1, \dots, s_\ell \in \mathbb{N}$  gibt, so dass

$$S = \left\{ s_0 + \sum_{j=1}^{\ell} \varepsilon_j s_j \mid \varepsilon_j \in \{0, 1\} \right\},$$

wobei  $s_j > s_1 + \dots + s_{j-1}$  für  $1 \leq j \leq \ell$ .

*Beweis:* Behauptung: es gibt ein  $N$  (abhängig von  $k$  und  $\ell$ ), so dass jede  $k$ -Färbung von  $[N]$  einen monochromatischen  $\ell$ -Würfel enthält. Das reicht für den Satz: partitioniere dazu  $\mathbb{N}$  in Intervalle der Länge  $N$ ; in jedem Intervall kommt irgendein monochromatischer Würfel vor. Laut Schubfachschluss haben unendlich viele Intervalle einen  $\ell$ -Würfel derselben Farbe, da es nur endlich viele  $\ell$ -Würfel im Intervall  $[N]$  gibt, muss ein Würfel unendlich oft vorkommen.

Beweis der Behauptung mittels Induktion nach  $\ell$ :

- Basis  $\ell = 1$ : ein 1-Würfel ist genau ein Punktepaar. Bei  $N = k + 1$  gibt es bereits zwei Punkte derselben Farbe.

- Schritt  $\ell \rightarrow \ell + 1$ : Sei  $n$  so gewählt, dass jede  $k$ -Färbung von  $[n]$  einen monochromatischen  $\ell$ -Würfel enthält.

Setze  $N = kn^{\ell+1}$ . Sei eine  $k$ -Färbung von  $[N]$  gegeben. Teile  $[N]$  in  $k \cdot n^\ell$  Intervalle der Länge  $n$  auf.

Jedes dieser Intervalle enthält einen monochromatischen  $\ell$ -Würfel. Laut Schubfachschluss gibt es eine Farbe, nenne diese rot, so dass  $n^\ell$  der Teilintervalle einen roten  $\ell$ -Würfel haben.

Es gibt höchstens  $\binom{n}{\ell}$  Auswahlen für die Ecken des Würfels (abgesehen von der Translation um  $s_0$ ), also  $< n^\ell$  verschiedene Würfel. Also gibt es einen roten  $\ell$ -Würfel, der mindestens in zwei Intervallen auftritt. Das ergibt einen roten  $(\ell + 1)$ -Würfel ( $s_{\ell+1}$  ist die Differenz zwischen beiden Kopien).  $\square$

**Satz 4.6** (Schur 1916): Für alle  $k$  gibt es ein  $m \in \mathbb{N}$ , so dass jede  $k$ -Färbung von  $[m]$  drei Elemente  $x, y, z$  derselben Farbe enthält, so dass

$$z = x + y.$$

*Beweis:* Sei  $n = R_k(3, 3, \dots, 3)$  die minimale Zahl  $n$ , so dass jede  $k$ -Färbung des vollständigen Graphen  $K_n$  ein monochromatisches Dreieck enthält.

Setze nun  $m = n - 1$ . Sei  $c : [m] \rightarrow [k]$  eine  $k$ -Färbung von  $[m]$ . Wir betrachten den  $K_n$  und färben dessen Kanten wie folgt:

$$c'(ij) = c(i - j) \quad \text{für } i > j, \quad ij \in E(K_n).$$

Es gibt folglich ein monochromatisches (rotes) Dreieck im  $K_n$  mit Knoten  $h < i < j$ . Setze

$$x = i - h, \quad y = j - i, \quad z = j - h,$$

dann gilt  $1 \leq x, y, z \leq n - 1$ . Es gilt

$$z = x + y, \quad c(z) = c'(jh) = \text{rot} = c'(ji) = c(y) = \dots = c(x).$$

Also sind  $x, y, z$  rot und erfüllen  $z = x + y$ .  $\square$

**Satz 4.7** (van der Waerden 1927): Seien  $k, \ell \in \mathbb{N}$ . Dann besitzt jede  $k$ -Färbung von  $\mathbb{N}$  eine arithmetische Folge der Länge  $\ell$ , die nicht-konstant und monochromatisch ist.

*Beweis:* Zwei  $m$ -Tupel  $(x_1, \dots, x_m) \in [0, \ell]^m$  und  $(y_1, \dots, y_m) \in [0, \ell]^m$  heißen  $\ell$ -äquivalent, wenn sie bis zum letzten Auftreten von  $\ell$  übereinstimmen, dh. es ein  $j \in \{0, \dots, m\}$  gibt, so dass

$$x_1 = y_1, \quad \dots, \quad x_j = y_j = \ell \text{ oder } j = 0, \\ x_{j+1}, \dots, x_m \in [0, \ell - 1], \quad y_{j+1}, \dots, y_m \in [0, \ell - 1].$$

Das ist eine Äquivalenzrelation. Wir werden die zugehörigen Äquivalenzklassen brauchen.

Aussage  $S(\ell, m)$ : Für alle  $k \in \mathbb{N}$  gibt es eine Zahl  $N = N(\ell, m, k)$ , so dass es für jede  $k$ -Färbung von  $[N]$  Zahlen  $a, d_1, \dots, d_m$  gibt, so dass die Farbe von

$$a + \sum_{j=1}^m x_j d_j$$

konstant für  $x = (x_1, \dots, x_m)$  aus einer  $\ell$ -Äquivalenzklasse ist.

Was heißt  $S(\ell, 1)$ ? Die Farbe von  $a + x_1 d_1$  ist konstant auf jeder  $\ell$ -Äquivalenzklasse. Es gibt zwei Äquivalenzklassen, nämlich  $\{(\ell)\}$  sowie  $\{(j) \mid j \in \{0, \dots, \ell - 1\}\}$ . Somit ist  $a + j d_1$  für  $0 \leq j < \ell$  eine monochromatische arithmetische Folge der Länge  $\ell$  in  $[N]$ . Das ist van der Waerden und damit gesucht.

Wir beweisen  $S(\ell, m)$  durch eine doppelte Induktion,

- 1. Schritt: aus  $S(\ell, 1)$  und  $S(\ell, m)$  folgt  $S(\ell, m + 1)$ .
- 2. Schritt: aus  $S(\ell, m)$  für alle  $m$  folgt  $S(\ell + 1, 1)$ .

Basis  $S(1, 1)$ : monochromatische arithmetische Folgen der Länge 1 gibt es.

1. Schritt: Für ein  $\ell$  und ein  $m$  gelten  $S(\ell, 1)$  und  $S(\ell, m)$ . Sei  $k$  fest. Wähle

$$M = N(\ell, m, k), \quad M' = N(\ell, 1, k^M).$$

Behauptung:  $S(\ell, m + 1)$  gilt mit

$$N(\ell, m + 1, k) = M \cdot M'.$$

Beweis der Behauptung: Sei  $c$  eine Färbung von  $[M \cdot M']$  mit  $k$  Farben. Wir teilen  $[M \cdot M']$  in  $M'$  Intervalle der Länge  $M$  auf. Diese heißen  $I_1, \dots, I_{M'}$ .

Es gibt  $k^M$  mögliche Farbkonstellationen in so einem Intervall.

Wir färben  $[M']$  wie folgt durch eine Funktion  $c' : [M'] \rightarrow [k^M]$ . Es gelte  $c'(i) = c'(j) \Leftrightarrow I_i$  und  $I_j$  haben die gleiche Farbkonfiguration bezüglich  $c$ .

Laut zweiter Induktionsannahme gilt van der Waerden für  $c'$ , es gibt also  $a'$  und ein  $d'$ , so dass

$$c'(a' + d'x)$$

nicht von  $x \in \{0, \dots, \ell - 1\}$  abhängt.

Im Intervall  $I_{a'}$  gilt die erste Induktionsannahme, es gibt also  $a, d_1, \dots, d_m$ , so dass

$$c\left(a + \sum_{j=1}^m d_j x_j\right)$$

konstant für  $(x_1, \dots, x_m)$  aus einer Äquivalenzklasse ist.

Setze  $d_{m+1} = d' M$ . Zu zeigen ist

$$c\left(\underbrace{a + \sum_{j=1}^m d_j x_j + d' M x_{m+1}}_{=:b}\right) = c\left(\underbrace{a + \sum_{j=1}^m d_j y_j + d' M y_{m+1}}_{=:d}\right),$$

falls

$$(x_1, \dots, x_{m+1}) \sim (y_1, \dots, y_{m+1}).$$

- Fall 1:  $x_{m+1} = y_{m+1} = \ell$ . Tupel gleich, also Farbe gleich, also fad.
- Fall 2:  $x_{m+1} < \ell$  und  $y_{m+1} < \ell$ , also ist  $(x_1, \dots, x_m) \sim (y_1, \dots, y_m)$ , also laut Konstruktion  $c(b) = c(d)$ . Zu zeigen ist

$$c(b + d' M x_{m+1}) = c(d + d' M y_{m+1}).$$

Dabei ist  $+d'Mx_{m+1}$  eine Verschiebung um  $d'x_{m+1}$  Intervalle,  $+d'My_{m+1}$  analog eine um  $d'y_{m+1}$  Intervalle, dh. der erste Wert liegt in  $I_{a'+d'x_{m+1}}$ , der zweite in  $I_{a'+d'y_{m+1}}$ . Laut Konstruktion von  $a', d'$  gilt, dass diese beiden Intervalle die gleiche  $c$ -Farbkonfiguration wie  $I_{a'}$  haben. Also ist

$$c(b + d'Mx_{m+1}) = c(b) = c(d) = c(d + d'My_{m+1}).$$

Damit ist der erste Induktionsschritt gezeigt.

2. Schritt:  $S(\ell, m)$  gilt für festes  $\ell$  und alle  $m$ . Zu zeigen ist  $S(\ell + 1, 1)$ . Sei  $k$  fest, setze  $M = 2N(\ell, k, k)$ .

Sei  $c : [M] \rightarrow [k]$  eine  $k$ -Färbung von  $[M]$ . Laut Induktionsannahme gibt es  $a, d_1, \dots, d_k$ , so dass

$$c\left(a + \sum_{j=1}^k d_j x_j\right)$$

nicht vom Repräsentanten  $(x_1, \dots, x_k)$  innerhalb einer festen  $\ell$ -Äquivalenzklasse abhängt, und

$$a + \sum_{j=1}^k d_j x_j \leq \frac{M}{2}.$$

Wir betrachten die Folge

$$c\left(a + \sum_{j=1}^u \ell d_j\right) \quad \text{für } u \in \{0, \dots, k\}.$$

Laut Schubfachschluss (nur  $k$  Farben werden angenommen) gibt es  $0 \leq u < v \leq k$  mit

$$c\left(a + \sum_{j=1}^u \ell d_j\right) = c\left(a + \sum_{j=1}^v \ell d_j\right).$$

Setze

$$A = a + \sum_{j=1}^u \ell d_j, \quad D = \sum_{j=u+1}^v d_j.$$

Behauptung:  $c(A + xD)$  ist konstant für  $x \in [0, \ell]$ .

Beweis der Behauptung:

- Fall 1:  $0 \leq x < \ell$ . Das entspricht dem Tupel

$$\underbrace{(\ell, \dots, \ell)}_u, \underbrace{(x, \dots, x)}_{v-u}, \underbrace{(0, \dots, 0)}_{k-v}.$$

$$c\left(a + \sum_{j=1}^k x_j d_j\right).$$

Diese Tupel sind alle in derselben Äquivalenzklasse, also hier konstant.

- Fall 2:  $x = \ell$ . Es gilt

$$\begin{aligned} c(A + \ell D) &= c\left(a + \sum_{j=1}^v \ell d_j\right) = c\left(a + \sum_{j=1}^u \ell d_j\right) \\ &= c(A) = c(A + 0D). \end{aligned}$$

Damit sind zweiter Induktionsschritt, Behauptung und Satz gezeigt. □



# Kapitel 5

## Probabilistische Methode — Zufallsgraphen

### 5.1 Einführung und einfaches Beispiel

Idee: Falls die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses positiv ist, existiert das zugehörige Item.

Wir verwenden Wahrscheinlichkeit, um nicht-probabilistische Ergebnisse abzuleiten.

**Satz 5.1:** Sei  $k \in \mathbb{N}$ . Dann gilt

$$R(k, k) \geq 2^{\frac{k}{2}},$$

wobei  $R(k, k)$  die Ramsey-Zahlen bezeichnet, dh. die minimale Ordnung eines Graphs, so dass dieser eine  $k$ -Clique oder eine unabhängige Menge der Kardinalität  $k$  enthält.

*Beweis:* Sei  $n$  fix, wir betrachten  $K_n$ . Die Kanten des  $K_n$  seien probabilistisch blau und rot gefärbt, so dass für eine Kante  $e$

$$\mathbb{P}(e \text{ rot}) = \mathbb{P}(e \text{ blau}) = \frac{1}{2}.$$

Die Farben der Kanten seien unabhängig.

Sei  $W$  eine Teilmenge der Knoten  $V(K_n)$  mit  $|W| = k$ . Bezeichne  $G[W]$  den von  $W$  induzierten Teilgraph. Dann ist

$$\mathbb{P}(G[W] \text{ ist rot}) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{k}{2}},$$

wobei  $\binom{k}{2}$  die Anzahl der Kanten von  $G[W]$  ist. Weiters

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(G \text{ enthält roten } K_k) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{\substack{W \subseteq V(K_n) \\ |W|=k}} G[W] \text{ ist rot}\right) \\ &\leq \sum_{\substack{W \subseteq V(K_n) \\ |W|=k}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{k}{2}} \\ &= \binom{n}{k} 2^{-\binom{k}{2}}. \end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(G \text{ enthält monochromatischen } K_k) \leq \binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}}.$$

Falls

$$\binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}} < 1,$$

dann ist

$$\mathbb{P}(G \text{ enthält keinen monochromatischen } K_k) > 0,$$

es gibt also eine Färbung der Kanten von  $K_n$ , die keinen monochromatischen  $K_k$  enthält. Folglich ist

$$R(k, k) > n.$$

Sei jetzt  $n \leq 2^{k/2}$ . Dann

$$\binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}} \leq \frac{n^k}{k!} 2^{1-\frac{k(k-1)}{2}} \leq \frac{2^{k^2/2}}{2^{k-1}} 2^{1-\frac{k^2}{2}+\frac{k}{2}} = \frac{4}{2^{k/2}} < 1$$

für  $k \geq 5$ . Auch für kleine  $k$  stimmt die Aussage,

$$R(3, 3) = 6 > 2^{3/2}, \quad R(4, 4) > 4. \quad \square$$

## 5.2 Methode des ersten Moments

Wir nehmen an, dass unsere Variablen endliche Erwartungswerte haben.

**Lemma 5.2:** Sei  $X$  eine Zufallsvariable mit endlichem Erwartungswert. Dann ist

$$\mathbb{P}(X \geq \mathbb{E}(X)) > 0$$

und

$$\mathbb{P}(X \leq \mathbb{E}(X)) > 0.$$

*Beweis:* Beobachtung: Falls  $Y > 0$  eine Zufallsvariable ist, ist auch  $\mathbb{E}(Y) > 0$ .

Beweis der Beobachtung aus maßtheoretischer Sicht: Der gesamte Maßraum ist gleich

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ Y > \frac{1}{n} \right\}.$$

$$1 = \mathbb{P}(\quad) \Rightarrow \exists n : \mathbb{P}\left(Y > \frac{1}{n}\right) > 0$$

Unter Verwendung von Iversons Notation ist

$$\mathbb{E}(Y) \geq \mathbb{E}\left(Y \cdot \left[Y > \frac{1}{n}\right]\right) \geq \frac{1}{n} \mathbb{E}\left(\left[Y > \frac{1}{n}\right]\right) = \frac{1}{n} \mathbb{P}\left(Y > \frac{1}{n}\right) > 0.$$

Angenommen  $\mathbb{P}(X > \mathbb{E}(X)) = 1$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \mathbb{E}(X \cdot [X > \mathbb{E}(X)]) \\ &= \underbrace{\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X)) \cdot [X > \mathbb{E}(X)])}_{>0} + \mathbb{E}(X) \mathbb{P}(X > \mathbb{E}(X)) \\ &> \mathbb{E}(X) \mathbb{P}(X > \mathbb{E}(X)) > \mathbb{E}(X), \end{aligned}$$

Widerspruch. Also ist

$$\mathbb{P}(X > \mathbb{E}(X)) < 1 \Rightarrow \mathbb{P}(X \leq \mathbb{E}(X)) > 0. \quad \square$$

**Lemma 5.3:** Sei  $X$  eine Zufallsvariable auf  $\mathbb{N}_0$  mit endlichem Erwartungswert. Dann ist

$$\mathbb{P}(X > 0) \leq \mathbb{E}(X).$$

*Beweis:*

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k \geq 0} k \cdot \mathbb{P}(X = k) \geq \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X > 0). \quad \square$$

*Beweis* (Beweisvariante für Satz 5.1): Wir färben wieder die Kanten von  $K_n$  rot und blau, unabhängig mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{2}$ .

$$\begin{aligned} X_n &= |\{\text{monochromatische } K_k \text{ in } K_n\}| \\ &= \sum_{\substack{W \subseteq \text{Knoten} \\ |W|=k}} [G[W] \text{ monochromatisch}]. \end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(X_n > 0) \leq \mathbb{E}(X_n) = \sum \mathbb{P}(G[W] \text{ monochromatisch}) = \binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}},$$

weiter wie oben. □

*Anmerkung:* Wir haben also aus den Sätzen 5.1 und 4.1 die Schranken

$$2^{k/2} < R(k, k) \leq \frac{2^{2k-2}}{\sqrt{k}}.$$

Leider sind  $\frac{1}{2}$  und 2 die besten bekannten Koeffizienten im Exponenten.

**Satz 5.4:** Sei  $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$  mit  $\|v_j\|_2 = 1$ . Dann gibt es  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{\pm 1\}^n$ , so dass

$$\|\varepsilon_1 v_1 + \dots + \varepsilon_n v_n\| \leq \sqrt{n},$$

und es gibt andere  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{\pm 1\}^n$ , so dass

$$\|\varepsilon_1 v_1 + \dots + \varepsilon_n v_n\| \geq \sqrt{n}.$$

*Beweis:* Sei  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{\pm 1\}^n$  gleichverteilt,

$$\mathbb{P}(\varepsilon_j = 1) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(\varepsilon_j = -1) = \frac{1}{2}.$$

Sei

$$X = \|\varepsilon_1 v_1 + \dots + \varepsilon_n v_n\|_2^2 = \sum_{i,j} \varepsilon_i \varepsilon_j \langle v_i, v_j \rangle.$$

Dann ist der Erwartungswert von  $X$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sum_{i,j} \mathbb{E}(\varepsilon_i \varepsilon_j) \cdot \langle v_i, v_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n \underbrace{\mathbb{E}(\varepsilon_i)}_{=0} \underbrace{\mathbb{E}(\varepsilon_j)}_{=0} \langle v_i, v_j \rangle + \sum_{i=1}^n \underbrace{\mathbb{E}(\varepsilon_i^2)}_{=1} \underbrace{\langle v_i, v_i \rangle}_{=1} = n. \end{aligned}$$

Wegen Lemma 5.2 ist  $\mathbb{P}(X \geq n) > 0$ ,  $\mathbb{P}(X \leq n) > 0$ . □

**Satz 5.5:** Sei  $G$  ein Graph von Ordnung  $n$  mit  $m$  Kanten,  $m \geq \frac{n}{2}$ . Dann ist

$$\alpha(G) \geq \frac{n^2}{4m},$$

wobei  $\alpha(G)$  die Independence-Zahl von  $G$  ist, dh. die maximale Kardinalität eines Independent Sets.

*Beweis:* Wir wählen zufällig eine Teilmenge  $S$  der Knotenmenge von  $G$ , wobei jeder Knoten von  $G$  unabhängig mit Wahrscheinlichkeit  $p$  ausgewählt wird, wobei

$$p = \frac{n}{2m}.$$

Sei  $X$  die Kardinalität von  $S$  und  $Y$  die Anzahl der Kanten in  $G[S]$ .

$$\mathbb{E}(X) = np = \frac{n^2}{2m}.$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= \sum_{e \in E(G)} \mathbb{E}(\text{beide Enden von } e \text{ sind in } S) \\ &= \sum_{e \in E(G)} p^2 = mp^2 = \frac{n^2}{4m}. \end{aligned}$$

$$\mathbb{E}(X - Y) = \frac{n^2}{2m} - \frac{n^2}{4m} = \frac{n^2}{4m}.$$

Laut vorigem Lemma ist

$$\mathbb{P}\left(X - Y \geq \frac{n^2}{4m}\right) > 0.$$

Es gibt also ein  $S \subseteq V(G)$  mit

$$|S| - |E(G[S])| \geq \frac{n^2}{4m}.$$

Für jede Kante in  $G[S]$  entfernen wir einen Endpunkt aus  $S$ . Im schlimmsten Fall entfernen wir einen Knoten pro Kante, dh. wir erhalten ein Independent Set mit Kardinalität  $\geq \frac{n^2}{4m}$ .  $\square$

**Satz 5.6** (Erdős 1959): Für alle positiven  $k, \ell$  gibt es einen Graph mit chromatischer Zahl  $\chi(G) \geq k$  und Tailenweite  $\text{girth}(G) \geq \ell$ . Die Tailenweite von  $G$  ist die minimale Länge eines Kreises in  $G$ .

*Anmerkung:* Ein Graph mit großer Tailenweite hat lokal die Form eines Baums. Ein Baum ist bipartit mit chromatischer Zahl  $\leq 2$ . Daher ist obiges Ergebnis etwas unerwartet.

*Beweis:* Sei

$$\theta < \frac{1}{\ell}, \quad p = n^{\theta-1}.$$

$n$  ist groß, siehe unten. Sei  $G$  ein Zufallsgraph auf  $[n]$ , wobei jede Kante mit Wahrscheinlichkeit  $p$  unabhängig ausgewählt wird.

Sei  $X$  die Anzahl der Kreise mit Länge  $\leq \ell$  in  $G$ .

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \mathbb{E} \left( \sum_{i=3}^{\ell} \sum_{\substack{W \subseteq [n] \\ |W|=i}} \sum_{\substack{\text{Zyklen } C \subseteq W \\ |C|=i}} [C \text{ Teilgraph von } G] \right) \\
&= \sum_{i=3}^{\ell} \sum_W \sum_C p^i = \sum_{i=3}^{\ell} \binom{n}{i} \frac{i!}{2^i} p^i \\
&\leq \sum_{i=3}^{\ell} \frac{n^i}{2^i} p^i = \sum_{i=3}^{\ell} \frac{n^{\theta i}}{2^i} \\
&\leq \sum_{i=3}^{\ell} n^{\theta i} = \mathcal{O}(n^{\ell \theta}) = o(n). \\
\mathbb{E}(X) &\geq \mathbb{E} \left( X \left[ X \geq \frac{n}{2} \right] \right) \geq \frac{n}{2} \mathbb{P} \left( X \geq \frac{n}{2} \right),
\end{aligned}$$

also ist die Wahrscheinlichkeit für viele kleine Kreise

$$\mathbb{P} \left( X \geq \frac{n}{2} \right) = o(1).$$

Wir haben

$$|G| \leq \chi(G) \cdot \alpha(G)$$

wegen

$$|G| = \sum_{\text{Farbe } C} \underbrace{|\{\text{Knoten von Farbe } C\}|}_{\leq \alpha(G)} \leq \chi(G) \alpha(G).$$

Nun gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\alpha(G) \geq a) &= \mathbb{P}(\exists S \subseteq [n] \mid |S| = a \text{ mit } S \text{ Independent Set}) \\
&\leq \sum_{\substack{S \subseteq [n] \\ |S|=a}} \mathbb{P}(S \text{ ist Independent Set}) \\
&= \sum_{\substack{S \subseteq [n] \\ |S|=a}} (1-p)^{\binom{a}{2}} = \binom{n}{a} (1-p)^{\binom{a}{2}} \\
&\leq \binom{n}{a} \exp(-p)^{\binom{a}{2}} = \binom{n}{a} \exp\left(\binom{a}{2}(-p)\right) \\
&\leq \frac{n^a}{a!} \exp\left(-p \binom{a}{2}\right) \leq n^a \exp\left(-p \cdot \frac{a-1}{2} \cdot a\right) \\
&= \left(n \cdot \exp\left(-p \cdot \frac{a-1}{2}\right)\right)^a.
\end{aligned}$$

Verwendet wurde noch  $\exp(x) \geq 1+x$  für  $x \in \mathbb{R}$ .

Wir wollen, dass

$$\begin{aligned}
n \cdot \exp\left(-p \cdot \frac{a-1}{2}\right) &= o(1) \\
\exp\left(-p \cdot \frac{a-1}{2}\right) &= o\left(\frac{1}{n}\right) \\
\frac{a-1}{2} &\approx \frac{\log n}{p}
\end{aligned}$$

und setze

$$a = \left\lceil \frac{3 \log n}{p} \right\rceil.$$

Überprüfe, dass

$$\exp\left(-p \cdot \frac{a-1}{2}\right) = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Dann ist

$$\mathbb{P}(\alpha(G) \geq a) = o(1), \quad \mathbb{P}\left(X \geq \frac{n}{2}\right) = o(1) \quad n \rightarrow \infty.$$

Es gibt ein  $n$ , so dass

$$\mathbb{P}(\alpha(G) \geq a) < \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}\left(X \geq \frac{n}{2}\right) < \frac{1}{2}.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\alpha(G) \geq a \text{ oder } X \geq \frac{n}{2}\right) &< 1 \\ \mathbb{P}\left(\alpha(G) < a \text{ und } X < \frac{n}{2}\right) &> 0. \end{aligned}$$

Also gibt es einen Graphen der Ordnung  $n$ , so dass

$$\alpha(G) < a \quad \text{und} \quad X < \frac{n}{2}.$$

Entferne einen Knoten aus jedem kurzen Kreis (Kreis mit Länge  $< \ell$ ), wir erhalten also einen neuen Graph  $G^*$  mit Ordnung  $\geq \frac{n}{2}$  und

$$\alpha(G^*) \leq \alpha(G) < a.$$

Wir haben also

$$|G^*| \geq \frac{n}{2}, \quad \text{girth}(G^*) \geq \ell$$

und für große  $n$

$$\chi(G^*) \geq \frac{|G^*|}{\alpha(G^*)} \geq \frac{\frac{n}{2}}{a} = \frac{\frac{n}{2}}{\left\lceil \frac{3 \log n}{p} \right\rceil} \geq k. \quad \square$$

### 5.3 Eigenschaften fast aller Graphen

Bis jetzt: deterministische Resultate über probabilistische Methode. Aber warum sollten wir nicht gleich probabilistische Resultate selbst betrachten?

**Definition 5.1:** Sei  $p : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$  (reelles Einheitsintervall),  $\mathcal{G}(n, p)$  der Wahrscheinlichkeitsraum der Graphen der Ordnung  $n$ , wobei jede Kante unabhängig und mit Wahrscheinlichkeit  $p$  eintritt.

Eine Eigenschaft  $P$  gilt für fast alle Graphen  $\mathcal{G}(n, p)$ , wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(G \text{ hat Eigenschaft } P) = 1.$$

Analog heißt “für fast keinen Graphen in  $\mathcal{G}(n, p)$ ”

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(G \text{ hat Eigenschaft } P) = 0.$$

**Proposition 5.7:** Sei  $p \in (0, 1)$  konstant,  $H$  ein fester Graph. Dann enthalten fast alle  $G \in \mathcal{G}(n, p)$  eine isomorphe Kopie von  $H$ .

*Beweis:* Sei  $k = |H|$ . Für  $n \geq k$  und  $U \subseteq [n]$  Teilmenge der Knoten mit  $|U| = k$  ist

$$\mathbb{P}(G[U] \simeq H) = r$$

für ein passendes  $r \in (0, 1)$ , wobei  $G[U]$  der von  $U$  induzierte Teilgraph von  $G$  ist. Dieses  $r$  ist fix und unabhängig von  $n$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\text{keine Kopie von } H \text{ in } G) &\leq \mathbb{P}(G[\{1, \dots, k\}] \not\simeq H \wedge G[\{k+1, \dots, 2k\}] \not\simeq H \wedge \dots) \\ &= \prod_{j=1}^{\lfloor n/k \rfloor} (1-r) = (1-r)^{\lfloor n/k \rfloor}, \end{aligned}$$

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1-r)^{\lfloor n/k \rfloor} = 0. \quad \square$$

**Lemma 5.8:** Seien  $i, j \in \mathbb{N}$ . Die Eigenschaft  $P_{ij}$  sei, dass es für alle Teilmengen  $U \subseteq V(G)$  mit  $|U| \leq i$  und für alle Teilmengen  $W \subseteq V(G)$  mit  $|W| \leq j$  einen Knoten  $x \in V(G) \setminus (U \cup W)$  gibt, so dass  $x$  zu allen Knoten in  $U$  adjazent ist und zu keinem Knoten in  $W$ .

Für konstantes  $p \in (0, 1)$  haben fast alle Graphen in  $\mathcal{G}(n, p)$  die Eigenschaft  $P_{ij}$ .

*Beweis:* Vorläufig seien  $U, W$  fest und  $x \in V(G) \setminus (U \cup W)$ . Bezeichne  $x$  als gut, wenn  $x$  adjazent zu allen Knoten in  $U$  und keinem in  $W$  ist. Dann ist

$$\mathbb{P}(x \text{ ist gut}) = p^{|U|} q^{|W|} \geq p^i q^j,$$

wobei  $q = 1 - p$ , und

$$\mathbb{P}(x \text{ ist schlecht}) \leq (1 - p^i q^j).$$

Bezeichne  $(U, W)$  als schlecht, wenn alle  $x \in V(G) \setminus (U \cup W)$  schlecht sind.

$$\mathbb{P}((U, W) \text{ schlecht}) = \mathbb{P}(\text{alle } x \text{ in } V(G) \setminus (U \cup W) \text{ schlecht}) \leq (1 - p^i q^j)^{n-(i+j)},$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\text{mind. ein } (U, W) \text{ schlecht}) &\leq \sum_{U, W} \mathbb{P}((U, W) \text{ schlecht}) \\ &\leq \sum_{|U|, |W|} \binom{n}{|U|} \binom{n-|U|}{|W|} \cdot (1 - p^i q^j)^{n-(i+j)} \\ &\leq (i+1)(j+1)n^{i+j} \underbrace{(1 - p^i q^j)^{n-(i+j)}}_{|\cdot| < 1} \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty. \quad \square \end{aligned}$$

**Proposition 5.9:** Für jedes  $k \in \mathbb{N}$  und fixes  $p \in (0, 1)$  ist fast jeder Graph  $G \in \mathcal{G}(n, p)$   $k$ -zusammenhängend (dh. Entfernen von bis zu  $k-1$  Knoten ergibt immer noch einen zusammenhängenden Graphen).

*Beweis:* Fast jeder Graph hat nach dem vorigen Lemma die Eigenschaft  $P_{2, k-1}$ .

Behauptung: Ein Graph  $G$  mit Eigenschaft  $P_{2, k-1}$  ist  $k$ -zusammenhängend.

Beweis der Behauptung: Wir entfernen eine Teilmenge  $W$  mit  $k-1$  Knoten aus  $G$ . Seien  $v, w \in V(G) \setminus W$ . Setze  $U = \{v, w\}$ . Wegen  $P_{2, k-1}$  existiert  $x \in V(G) \setminus (W \cup U)$ , so dass  $xv \in E(G), xw \in E(G)$ . Also existiert ein Pfad der Länge 2 zwischen  $v$  und  $w$ .  $\square$

*Anmerkung:* Es stellt sich heraus, dass fixes  $p$  eher langweilig ist, da fast alle interessanten Eigenschaften fast immer oder fast nie zutreffen.

*Frage:* Gegeben eine Eigenschaft  $P$ , gibt es eine Funktion  $t$  (Threshold function, Schwellenfunktion), so dass fast kein  $G \in \mathcal{G}(n, p)$  die Eigenschaft  $P$  für  $p(n) = o(t(n))$  hat, und fast alle  $G \in \mathcal{G}(n, p)$  haben die Eigenschaft  $P$  mit  $t(n) = o(p(n))$ .

“Wachstumsprozess”:

- für  $p = 0$  isolierte Knoten
- für  $\frac{p(n)}{1/n^2} \rightarrow \infty$  gibt es fast sicher eine Kante
- ... Dreiecke?
- ... zusammenhängender Graph?
- ... Hamiltonscher Kreis?

## 5.4 Methode des zweiten Moments und Schwellenfunktionen

Wir verwenden, sofern vorhanden, die Varianz, um bessere Schranken zu erhalten.

**Lemma 5.10** (Čebyšëv): Sei  $X$  eine Zufallsvariable mit

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) < \infty.$$

Dann gilt für alle  $\lambda > 0$

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \lambda) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{\lambda^2}.$$

*Beweis:*

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) \geq \mathbb{E}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \lambda \cdot \lambda^2) = \lambda^2 \cdot \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \lambda). \quad \square$$

**Lemma 5.11:** Sei  $X$  eine Zufallsvariable auf  $\mathcal{G}(n, p)$  mit Werten in  $\mathbb{N}_0$ . Falls

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{V}(X)}{(\mathbb{E}(X))^2} = 0,$$

dann gilt  $X > 0$  für fast alle  $G$  in  $\mathcal{G}(n, p)$ .

*Beweis:*

$$\mathbb{P}(X = 0) \leq \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \mathbb{E}(X)) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{\mathbb{E}(X)^2} \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty,$$

$$\mathbb{P}(X > 0) \rightarrow 1. \quad \square$$

**Definition 5.2:** Sei  $H$  ein Graph. Dann heißt  $H$  *balanciert*, falls

$$\frac{|E(H')|}{|V(H')|} \leq \frac{|E(H)|}{|V(H)|}$$

für alle Teilgraphen  $H'$  von  $H$ .

Anmerkung: Wegen

$$2|E(H)| = \sum_{v \in V(H)} \deg v$$

folgt

$$2 \frac{|E(H)|}{|V(H)|} = \frac{\sum \deg v}{|V(H)|} = \text{Durchschnittsknotengrad von } H.$$

*Beispiel* (Kreise): Sei  $H$  ein Kreis und  $H'$  Teilgraph von  $H$ . Der Durchschnittsgrad von  $H$  ist 2, der von  $H'$  kleinergleich, da jeder Knoten in  $H'$  Grad  $\leq 2$  hat. Also sind Kreise balanciert.

*Beispiel* (Bäume): Sei  $H$  ein Baum.

$$\frac{|E(H)|}{|V(H)|} = \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}.$$

Sei  $H'$  ein Teilgraph von  $H$ , dh. ein Wald. Sei  $n' = |V(H')|$ ,  $k$  die Anzahl der Zusammenhangskomponenten von  $H'$ .

$$\frac{|E(H')|}{|V(H')|} = \frac{n' - k}{n'} = 1 - \frac{k}{n'} \leq 1 - \frac{1}{n}$$

wegen  $k \geq 1$  und  $n' \leq n$ . Also sind Bäume balanciert.

*Beispiel* (Vollständige Graphen): Sei  $H = K_n$ , dh. ein vollständiger Graph der Ordnung  $n$ .

$$\frac{|E(H)|}{|V(H)|} = \frac{\binom{n}{2}}{n} = \frac{n-1}{2}.$$

Sei  $H'$  ein Teilgraph von  $H$  der Ordnung  $m$ .

$$\frac{|E(H')|}{|V(H')|} \leq \frac{\binom{m}{2}}{m} = \frac{m-1}{2} \leq \frac{n-1}{2}.$$

Also sind vollständige Graphen ebenfalls balanciert.

**Satz 5.12** (Erdős, Rényi 1960): Sei  $H$  ein balancierter Graph von Ordnung  $k$  mit  $\ell$  Kanten. Dann ist

$$t(n) = n^{-k/\ell}$$

eine Schwellenfunktion für die Eigenschaft, eine Kopie von  $H$  als Teilgraph zu enthalten.

**Korollar 5.13:** Die Funktion

$$t(n) = \frac{1}{n}$$

ist eine Schwellenfunktion dafür, einen Kreis der Länge  $k$  zu enthalten.

**Korollar 5.14:** Die Funktion

$$t(n) = \frac{1}{n^{k/(k-1)}}$$

ist eine Schwellenfunktion dafür, einen gegebenen Baum der Ordnung  $k$  zu enthalten.

**Korollar 5.15:** Die Funktion

$$t(n) = \frac{1}{\frac{k-1}{2}\sqrt{n}}$$

ist eine Schwellenfunktion dafür, einen vollständigen Graphen der Ordnung  $k$  zu enthalten.

**Korollar 5.16:** Die Funktion

$$t(n) = \frac{1}{n^2}$$

ist eine Schwellenfunktion dafür, eine Kante zu enthalten.

*Beweis* (Korollare): Für die ersten drei Korollare den Satz mit den Beispielen verbinden; für das vierte Korollar im dritten Korollar  $k = 2$  setzen.  $\square$

*Beweis* (Satz): Bezeichne  $X(G)$  die Anzahl der Kopien von  $H$  in  $G$ , dh. die Anzahl der Teilgraphen von  $G$ , die isomorph zu  $H$  sind.

$$\mathcal{H} = \{H' \text{ Graph} \mid V(H') \subseteq [n], H' \simeq H\}.$$

$$|\mathcal{H}| = \binom{n}{k} h$$

für eine Konstante  $h$  mit  $1 \leq h \leq k!$ . Also ist

$$|\mathcal{H}| \leq n^k.$$

$$X(G) = \sum_{H' \in \mathcal{H}} [H' \subseteq G],$$

wobei  $H' \subseteq G$  für „ $H'$  ein Teilgraph von  $G$ “ steht. Setze

$$\gamma(n) = \frac{p(n)}{t(n)},$$

wobei

$$t(n) = n^{-k/\ell}.$$

Damit ist

$$p = \gamma \cdot n^{-k/\ell}.$$

- Fall 1:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma(n) = 0.$$

Wir müssen zeigen, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X > 0) = 0.$$

Nach Lemma 5.3 ist

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X > 0) &\leq \mathbb{E}(X) = \sum_{H' \in \mathcal{H}} \mathbb{P}(H' \subseteq G) \\ &= \sum_{H' \in \mathcal{H}} p^\ell = |\mathcal{H}| \cdot \gamma^\ell n^{-k} \\ &\leq n^k \gamma^\ell n^{-k} = \gamma^\ell \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

- Fall 2:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma(n) = \infty.$$

Wir müssen zeigen, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X > 0) = 1.$$

Nach Lemma 5.11 reicht es dafür,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{V}(X)}{\mathbb{E}(X)^2} = 0$$

zu zeigen. Es gilt

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2, \quad \mathbb{E}(X) = |\mathcal{H}| \gamma^\ell n^{-k}.$$

Wir müssen  $\mathbb{E}(X^2)$  abschätzen.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^2) &= \mathbb{E} \left( \left( \sum_{H' \in \mathcal{H}} [H' \subseteq G] \right)^2 \right) \\ &= \mathbb{E} \left( \sum_{(H', H'') \in \mathcal{H}^2} [H' \subseteq G][H'' \subseteq G] \right) \\ &= \sum_{(H', H'') \in \mathcal{H}^2} \mathbb{P}(H' \subseteq G, H'' \subseteq G) \end{aligned}$$

Diese beiden Ereignisse sind nicht unabhängig wegen eventueller gemeinsamer Kantenpaare.

$$\mathbb{P}(H' \subseteq G \wedge H'' \subseteq G) = p^{\ell + \ell - \|H' \cap H''\|},$$

wobei  $\|H' \cap H''\|$  die Anzahl der gemeinsamen Kanten von  $H'$  und  $H''$  ist.

Wir haben mit  $H' \sim H$ ,  $H$  balanciert,  $H' \cap H''$  Teilgraph von  $H'$

$$\frac{\|H' \cap H''\|}{|V(H' \cap H'')|} \leq \frac{\|H'\|}{|V(H')|} = \frac{\ell}{k},$$

also

$$\|H' \cap H''\| \leq \frac{\ell}{k} |V(H' \cap H'')|.$$

Daraus erhalten wir

$$\mathbb{P}(H' \subseteq G \wedge H'' \subseteq G) \leq p^{2\ell - \frac{\ell}{k} |V(H' \cap H'')|},$$

und daraus

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^2) &= \sum_{i=0}^k \sum_{\substack{(H', H'') \in \mathcal{H}^2 \\ |V(H' \cap H'')|=i}} p^{2\ell - \frac{\ell i}{k}} \\ &= h^2 \binom{n}{k} \binom{n-k}{k} p^{2\ell} + \sum_{i=1}^k \sum_{\substack{(H', H'') \in \mathcal{H}^2 \\ |V(H' \cap H'')|=i}} p^{2\ell - \frac{\ell i}{k}}, \end{aligned}$$

wobei

$$|\mathcal{H}| = h \cdot \binom{n}{k}, \quad \mathbb{E}(X) = |\mathcal{H}| \cdot p^\ell$$

verwendet wurde. Der Summand für  $i = 0$  ist

$$\leq \binom{n}{k} h p^\ell \binom{n}{k} h p^\ell = \mathbb{E}(X)^2.$$

Also ist

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X^2) &\leq \sum_{i=1}^k \sum_{\substack{(H', H'') \in \mathcal{H}^2 \\ |V(H' \cap H'')|=i}} p^{2\ell - \frac{\ell i}{k}} \\
&= \sum_{i=1}^k \binom{n}{k} \binom{k}{i} \binom{n-k}{k-i} h^2 p^{2\ell - \frac{\ell i}{k}} \\
&= \underbrace{\binom{n}{k} h p^\ell}_{\mathbb{E}(X)} \cdot \sum_{i=1}^k \underbrace{\binom{k}{i} \binom{n-k}{k-i}}_{\mathcal{O}(1)} h p^{\ell - \frac{\ell i}{k}}
\end{aligned}$$

wegen  $k$  konstant,  $i = \mathcal{O}(1)$ ,

$$\begin{aligned}
&\leq \mathbb{E}(X) \cdot \sum_{i=1}^k c_1(k) (n-k)^{k-i} h p^{\ell - \frac{\ell i}{k}} \\
&= p^\ell \mathbb{E}(X) h \cdot \sum_{i=1}^k c_1(k) \underbrace{(n-k)^{k-i} n^{\frac{k}{\ell} \cdot \frac{\ell}{k} i}}_{\leq n^k} \cdot \gamma^{-\frac{\ell}{k} i} \\
&\leq p^\ell \mathbb{E}(X) h \sum_{i=1}^k c_1(k) n^k \gamma^{-\frac{\ell}{k} i}
\end{aligned}$$

$$n^k \leq c_2(k) \binom{n}{k},$$

$$\begin{aligned}
&\leq \mathbb{E}(X) h p^\ell \binom{n}{k} c_3(k) \gamma^{-\frac{\ell}{k}} \\
&= \mathbb{E}(X)^2 \cdot c_3(k) \underbrace{\gamma^{-\frac{\ell}{k}}}_{\rightarrow 0} = o(\mathbb{E}(X)^2). \quad \square
\end{aligned}$$

# Kapitel 6

## Transformationsformeln

### 6.1 Inversionen von Permutationen

$a_1 a_2 \dots a_n$  Permutationen von  $\{1, 2, \dots, n\}$ ,  $a_i > a_j$  für  $i < j$  heißt Inversion.

*Beispiel:* 41352 hat fünf Inversionen.

Mit  $I(\pi)$  bezeichnen wir die Anzahl der Inversionen von  $\pi$ . Inversionstabelle:  $(b_1, \dots, b_n)$  mit  $b_i$  die Anzahl der Elemente größer  $i$  links von  $i$ .

*Beispiel:* Gegeben sei eine Permutation mit den Inversionen

$$b_1 = 1, \quad b_2 = 3, \quad b_3 = 1, \quad b_4 = 0, \quad b_5 = 0,$$

Der Inversionsvektor ist also  $(1, 3, 1, 0, 0)$ . Offensichtlich muss gelten

$$0 \leq b_1 \leq n-1, \quad 0 \leq b_2 \leq n-2, \quad \dots, \quad 0 \leq b_n \leq 0.$$

Aus einer Inversionstabelle kann man die Permutation eindeutig rekonstruieren, sowohl von Anfang zum Ende als auch in umgekehrter Richtung durchlaufend; in diesem Fall ist die Permutation

$$41352.$$

Es gibt  $n \cdot (n-1) \dots 1$  Inversionstabellen, es gibt eine offensichtliche Bijektion zwischen Permutationen und Inversionstabellen.

Betrachte die erzeugende Funktion

$$\sum_{\pi \in S_n} q^{I(\pi)}.$$

Möglichkeiten für eine Inversionstabelle als erzeugende Funktion:

$$(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}) \cdot (1 + q + \dots + q^{n-2}) \dots (1 + q) \cdot 1.$$

Ausmultiplizieren ergibt als typischen Term

$$q^{b_1 + b_2 + \dots + b_n}, \quad 0 \leq b_1 \leq n-1, \quad \dots, \quad 0 \leq b_n \leq 0.$$

Es gilt dabei

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n = I(\pi),$$

die Gesamtanzahl an Inversionen.

Damit ist

$$\sum_{\pi \in S_n} q^{I(\pi)} = \frac{1}{(1-q)^n} \cdot (1-q) \cdot (1-q^2) \cdots (1-q^n).$$

*Anmerkung:* Die durchschnittliche Anzahl an Inversionen ist

$$\frac{n \cdot (n-1)}{4} = \frac{1}{2} \binom{n}{2}.$$

(Minimal 0, maximal  $\binom{n}{2}$ , einfache Symmetrie zwischen Inversionen und Nicht-Inversionen.)

## 6.2 $q$ -Reihen

Notation: für  $n \in \mathbb{N}$  sei

$$(x; q)_n := (1-x) \cdot (1-xq) \cdot (1-xq^2) \cdots (1-xq^{n-1}),$$

folglich also

$$(q; q)_n := (1-q) \cdot (1-q^2) \cdots (1-q^n) = (q)_n.$$

Des weiteren

$$(x; q)_0 := 1.$$

Wir betrachten iA  $|q| < 1$ , um Konvergenzprobleme zu vermeiden, daher

$$(x; q)_\infty := \prod_{k=0}^{\infty} (1-xq^k) \Rightarrow (x; q)_n = \frac{(x; q)_\infty}{(xq^n; q)_\infty}.$$

Die rechte Seite ist allerdings für alle  $n$  sinnvoll (nicht nur  $n \in \mathbb{N}$ ); Definiere also für  $n \in \mathbb{C}$  ebenfalls

$$(x; q)_n = \frac{(x; q)_\infty}{(xq^n; q)_\infty}.$$

Die erzeugende Funktion der Inversionen ist daher

$$\frac{(q)_n}{(1-q)^n},$$

und es gilt

$$\lim_{q \rightarrow 1} \frac{(q)_n}{(1-q)^n} = n!.$$

Die Beobachtung

$$\lim_{q \rightarrow 1} \frac{1-q^n}{1-q} = n$$

führt zur Definition

$$[n]_q = \frac{1-q^n}{1-q},$$

“ $q$ -Version von  $n$ ”.

**Satz 6.1** (Cauchysche Formel,  $q$ -Binomial-Formel):

$$\frac{(at)_\infty}{(t)_\infty} = \sum_{n \geq 0} \frac{(a)_n}{(q)_n} t^n.$$

*Beweis:* Bezeichne

$$F(t) = \frac{(at)_\infty}{(t)_\infty} = \sum_{n \geq 0} A_n t^n.$$

$$F(t) = \frac{1-at}{1-t} F(qt) \Rightarrow (1-t)F(t) = (1-at)F(qt).$$

Koeffizientenvergleich von  $t^n$ :

$$A_n - A_{n-1} = q^n A_n - a q^{n-1} A_{n-1}$$

$$A_n(1 - q^n) = A_{n-1}(1 - a q^{n-1})$$

$A_0 = F(0) = 1$ , daher

$$A_n = \frac{1 - a q^{n-1}}{1 - q^n} A_{n-1} = \frac{1 - a q^{n-1}}{1 - q^n} \cdot \frac{1 - a q^{n-2}}{1 - q^{n-1}} \cdots \frac{1 - a}{1 - q} A_0 = \frac{(a; q)_n}{(q; q)_n}. \quad \square$$

**Korollar 6.2** (Eulers erste Partitionsfunktion): Setze  $a = 0$ :

$$\frac{1}{(t)_\infty} = \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{(q)_n} = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1 - tq^k}.$$

**Korollar 6.3** (Eulers zweite Partitionsfunktion): Ersetze  $a \rightarrow \frac{a}{b}$ ,  $t \rightarrow b \cdot t$ , daher

$$(a)_n t^n \rightarrow \left(1 - \frac{a}{b}\right) \cdot \left(1 - \frac{a}{b}q\right) \cdots \left(1 - \frac{a}{b}q^{n-1}\right) b^n t^n = (b-a) \cdot (b-aq) \cdots (b-aq^{n-1}).$$

Setze jetzt  $b = 0$ ,  $a = 1$ :

$$\prod_{k=0}^{\infty} (1 - tq^k) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n q^{\binom{n}{2}} t^n}{(q)_n}.$$

$a = -1$  entspricht

$$\prod_{k=0}^{\infty} (1 + tq^k) = \sum_{n \geq 0} \frac{q^{\binom{n}{2}} t^n}{(q)_n}.$$

## 6.3 Heines Transformationsformeln

**Satz 6.4** (Heines Transformationsformel):

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(a)_n (b)_n}{(q)_n (c)_n} t^n = \frac{(b)_\infty (at)_\infty}{(c)_\infty (t)_\infty} \sum_{m \geq 0} \frac{(c/b)_m (t)_m}{(q)_m (at)_m} b^m.$$

Dabei sind  $a, b$  obere Parameter,  $c$  ist unterer Parameter (vgl. hypergeometrische Funktionen).

*Beweis:*

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(a)_n (b)_n}{(q)_n (c)_n} t^n = \frac{(b)_\infty}{(c)_\infty} \sum_{n \geq 0} \frac{(a)_n}{(q)_n} t^n \frac{(cq^n)_\infty}{(bq^n)_\infty}$$

Letzten Term mit Cauchys Formel erweitern:

$$= \frac{(b)_\infty}{(c)_\infty} \sum_{n \geq 0} \frac{(a)_n}{(q)_n} t^n \sum_{m \geq 0} \frac{(c/b)_m}{(q)_m} (bq^n)^m$$

Summen vertauschen:

$$\begin{aligned} &= \frac{(b)_\infty}{(c)_\infty} \cdot \sum_{m \geq 0} \frac{(c/b)_m}{(q)_m} b^m \underbrace{\sum_{n \geq 0} \frac{(a)_n}{(q)_n} (q^m t)^n}_{\frac{(aq^m t)_\infty}{(q^m t)_\infty}} \\ &= \frac{(b)_\infty (at)_\infty}{(c)_\infty (t)_\infty} \sum_{m \geq 0} \frac{(c/b)_m (t)_m}{(q)_m (at)_m} b^m \end{aligned}$$

Vorher hatten wir  $a, b, c, t$ , jetzt stattdessen  $c/b, t, at, b$ . □

**Korollar 6.5** (Heines Korollar):

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(a)_n (b)_n}{(q)_n (c)_n} \left( \frac{c}{ab} \right)^n = \frac{(c/a)_\infty (c/b)_\infty}{(c)_\infty (c/(ab))_\infty}.$$

*Beweis:* Setze in Heines Transformationsformel  $t = \frac{c}{ab}$ .

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(a)_n (b)_n}{(q)_n (c)_n} \left( \frac{c}{ab} \right)^n = \frac{(b)_\infty (c/b)_\infty}{(c)_\infty (c/(ab))_\infty} \sum_{m \geq 0} \frac{(c/b)_m (c/(ab))_m}{(q)_m (c/b)_m} b^m$$

Auswerten mit Cauchy:

$$= \frac{(b)_\infty (c/b)_\infty}{(c)_\infty (c/(ab))_\infty} \cdot \frac{(c/b)_\infty}{(b)_\infty} = \frac{(c/a)_\infty (c/b)_\infty}{(c)_\infty (c/(ab))_\infty}. \quad \square$$

*Anmerkung:* Das sind  $q$ -hypergeometrische Funktionen, Grenzübergang  $q \rightarrow 1$  ergibt hypergeometrische Funktionen.

## 6.4 Partitionen

**Definition 6.1** (Partition): Eine *Partition* einer natürlichen Zahl  $n$  ist eine Darstellung als Summe anderer natürlicher Zahlen,  $n = i_1 + i_2 + \dots + i_k$  mit  $i_s \in \mathbb{N}$  (Reihenfolge egal).  $k$  ist die Anzahl der Summanden (Teile).

*Beispiel:*  $n = 5$ :

$$5, 4 + 1, 3 + 2, 3 + 1 + 1, 2 + 2 + 1, 2 + 1 + 1 + 1, 1 + 1 + 1 + 1 + 1.$$

Es gibt also 7 Partitionen von 5.

$p(n)$  bezeichne die Anzahl der Partitionen von  $n$ . Suche die erzeugende Funktion (*Partitionsfunktion*)

$$\sum_{n \geq 0} p(n)q^n = ?$$

Erzeugende Funktion,  $n = i_1 + 2i_2 + 3i_3 + \dots$  mit  $i_1 \geq 0, i_2 \geq 0, \dots$ :

$$(1 + q + q^2 + \dots) \cdot (1 + q^2 + q^4 + \dots) \cdot (1 + q^3 + q^6 + \dots) \cdots$$

Ausmultiplizieren ergibt einen typischen Term

$$q^{i_1 + 2i_2 + 3i_3 + \dots}$$

$q^n$  erscheint in  $p(n)$  Termen,

$$\sum_{n \geq 0} p(n)q^n = \frac{1}{1-q} \cdot \frac{1}{1-q^2} \cdot \frac{1}{1-q^3} \cdots = \frac{1}{(q, q)_\infty}.$$

Die Anzahl der Summanden ist  $i_1 + i_2 + i_3 + \dots$ :

$$\begin{aligned} \prod_{k \geq 1} \frac{1}{1 - q^k t} &= \sum q^{i_1 + 2i_2 + \dots} t^{i_1 + i_2 + \dots} \\ &= \sum (\# \text{ Partitionen von } n \text{ in } m \text{ Summanden}) q^n t^m \\ &= \frac{1}{(tq)_\infty} \end{aligned}$$

Eulers Partitionsfunktion:

$$= \sum_{m \geq 0} \frac{t^m q^m}{(q)_m}.$$

Koeffizient von  $t^m$ :

$$\frac{q^m}{(q)_m}.$$

Das ist die erzeugende Funktion von Partitionen mit  $m$  Summanden ( $m$  fix).

Partitionen in verschiedene Summanden:

*Beispiel:*  $n = 5$ :

$$5, 4 + 1, 3 + 2.$$

Gesucht ist wieder eine erzeugende Funktion,

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} (\# \text{ Partitionen von } n \text{ in verschiedene Summanden}) q^n &= (1 + q) \cdot (1 + q^2) \cdot (1 + q^3) \cdots \\ &= (-q; q)_\infty \end{aligned}$$

Wir hatten das  $q$ -Pochhammer-Symbol  $(x; q)_n$  betrachtet.

Eines der Korollare war

$$\prod_{k=0}^{\infty} (1 - tq^k) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n q^{\binom{n}{2}} t^n}{(q)_n}.$$

Ersetze jetzt  $t \rightarrow -tq$ , dann erhalten wir

$$(1 + tq) \cdot (1 + tq^2) \cdot (1 + tq^3) \cdots = \sum_{n \geq 0} \frac{q^{\binom{n+1}{2}} t^n}{(q)_n}.$$

Wir hatten auch bereits die erzeugende Funktion bzgl. Partitionen mit verschiedenen Summanden:

$$(1 + q)(1 + q^2)(1 + q^3) \cdots$$

Wenn wir zusätzlich an der Anzahl der Summanden in der Partition interessiert sind, ist die erzeugende Funktion

$$(1 + tq)(1 + tq^2)(1 + tq^3) \cdots$$

Die erzeugende Funktion für Partitionen mit  $m$  verschiedenen Summanden ist laut dem Korollar gleich

$$\frac{q^{\binom{m+1}{2}}}{(q)_m}.$$

## 6.5 Jacobis Tripelprodukt

**Satz 6.6** (Jacobis Tripelprodukt):

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} z^n q^{n^2} = \prod_{n \geq 0} (1 - q^{2n+2}) (1 + zq^{2n+1}) \left(1 + \frac{1}{z} q^{2n+1}\right).$$

*Anmerkung:* Das ist eine Laurentreihe.

*Beweis:* Euler-Partitions-Satz

$$\begin{aligned} \prod_{n \geq 0} (1 + zq^{2n+1}) &= \sum_{m \geq 0} \frac{q^{2\binom{m}{2}} q^m z^m}{(q^2; q^2)_m} = \sum_{m \geq 0} \frac{q^{m^2} z^m}{(q^2; q^2)_m} \\ &= \frac{1}{(q^2; q^2)_\infty} \sum_{m \geq 0} q^{m^2} z^m \cdot (q^{2m+2}; q^2)_\infty \end{aligned}$$

Negative Summanden in der Summe wären alle gleich 0, also können wir statt über  $m \geq 0$  auch alle  $m \in \mathbb{Z}$  summieren:

$$= \frac{1}{(q^2; q^2)_\infty} \sum_{m \in \mathbb{Z}} q^{m^2} z^m \cdot (q^{2m+2}; q^2)_\infty$$

Wieder Eulers Partitionssatz:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{(q^2; q^2)_\infty} \sum_{m \in \mathbb{Z}} q^{m^2} z^m \cdot \sum_{r \geq 0} \frac{(-q^{2m+2})^r q^{r(r-1)}}{(q^2; q^2)_r} \\ &= \frac{1}{(q^2; q^2)_\infty} \sum_{r \geq 0} \frac{q^{r^2+r} (-1)^r}{(q^2; q^2)_r} \sum_{m \in \mathbb{Z}} z^m q^{m^2+2mr} \\ &= \frac{1}{(q^2; q^2)_\infty} \sum_{r \geq 0} \frac{q^r z^{-r} (-1)^r}{(q^2; q^2)_r} \sum_{m \in \mathbb{Z}} z^{m+r} q^{(m+r)^2} \end{aligned}$$

Wenn  $m$  ganz  $\mathbb{Z}$  durchläuft, dann auch  $m+r$ :

$$= \frac{1}{(q^2; q^2)_\infty} \sum_{r \geq 0} \frac{q^r z^{-r} (-1)^r}{(q^2; q^2)_r} \sum_{m \in \mathbb{Z}} z^m q^{m^2}$$

Wieder Euler:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{(q^2; q^2)_\infty} \frac{1}{(-\frac{q}{z}; q^2)_\infty} \sum_{m \in \mathbb{Z}} z^m q^{m^2} \\ &= (-zq; q^2)_\infty (q^2; q^2)_\infty \left(-\frac{q}{z}; q^2\right)_\infty = \sum_{m \in \mathbb{Z}} z^m q^{m^2} \end{aligned} \quad \square$$

Ersetze nun im Tripelprodukt  $q \rightarrow q^{\frac{3}{2}}$  und  $z \rightarrow -q^{\frac{1}{2}}$ :

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n q^{\frac{n}{2}(3n+1)} &= \prod_{n \geq 0} (1 - q^{3n+3}) \cdot (1 - q^{3n+2}) \cdot (1 - q^{3n+1}) \\ &= \prod_{n \geq 1} (1 - q^n) \end{aligned}$$

Ersetze  $n \rightarrow -n$ :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n q^{\frac{n}{2}(3n-1)} = \prod_{n \geq 1} (1 - q^n) = (q; q)_\infty.$$

**Satz 6.7** (Eulers Pentagonal-Satz):

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n q^{\frac{n}{2}(3n-1)} = (q; q)_\infty.$$

**Korollar 6.8** (Gauß):

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n q^{n^2} = \prod_{m \geq 1} \frac{1 - q^m}{1 + q^m}.$$

*Beweis:* Setze oben  $z = -1$ , dann

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n q^{n^2} &= (q^2; q^2)_\infty (q; q^2)_\infty (q; q^2)_\infty = (q; q)_\infty (q; q^2)_\infty \\ &= (q; q)_\infty \frac{(q; q)_\infty}{(q^2, q^2)_\infty} = \frac{(q; q)_\infty^2}{(q; q)_\infty (-q; q)_\infty} = \prod_{m \geq 1} \frac{1 - q^m}{1 + q^m}. \end{aligned} \quad \square$$

**Korollar 6.9** (Gauß):

$$\sum_{n \geq 0} q^{\frac{n(n+1)}{2}} = \prod_{n \geq 1} \frac{1 - q^{2n}}{1 - q^{2n-1}}.$$

*Beweis:*

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} q^{\frac{n(n+1)}{2}} &= \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\sqrt{q})^n (\sqrt{q})^{n^2} \\ &= \frac{1}{2} \prod_{n \geq 0} (1 - q^{n+1}) (1 + q^{n+1}) (1 + q^n) = \prod_{n \geq 1} (1 - q^n) (1 + q^n)^2 \\ &= \prod_{n \geq 1} (1 - q^{2n}) \frac{1 - q^{2n}}{1 - q^n} = \prod_{n \geq 1} \frac{1 - q^{2n}}{1 - q^{2n-1}}. \end{aligned} \quad \square$$

## 6.6 Franklins Beweis des Pentagonalersatzes

Dreieckszahlen:  $1 + 2 + 3 + \dots + n$

Quadratzahlen (Viereck):  $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$

Pentagonalzahlen:  $1 + 4 + 7 + 10 + \dots + (3n - 2)$ , aber auch  $2 + 5 + 8 + 11 + \dots + (3n - 1)$

Summe der Pentagonalzahlen:

$$1 + 4 + 7 + \dots + (3n - 2) = \frac{n(3n - 1)}{2}$$

$$2 + 5 + 8 + \dots + (3n - 1) = \frac{n(3n + 1)}{2}$$

$p_e(\mathcal{D}, n)$  bezeichne die Anzahl der Partitionen von  $n$  in eine gerade Anzahl verschiedener Summanden,  $p_o(\mathcal{D}, n)$  analog mit ungerader Anzahl.

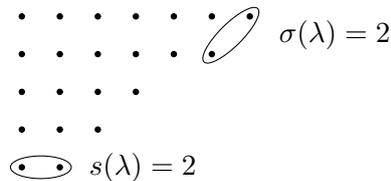
Behauptung:

$$p_e(\mathcal{D}, n) - p_o(\mathcal{D}, n) = \begin{cases} (-1)^m & n = \frac{m(3m \pm 1)}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

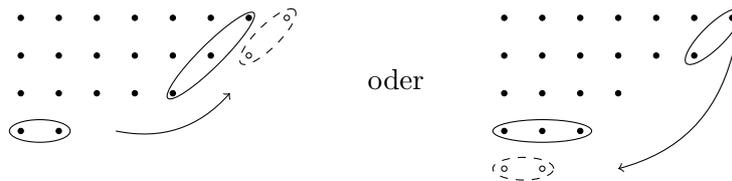
Wir zeigen, dass diese Aussage äquivalent zu Eulers Pentagonalersatz ist.

Wir repräsentieren Partitionen im Folgenden graphisch.

*Beispiel:*  $n = 22$ , Partition  $\lambda = (7, 6, 4, 3, 2)$ . Repräsentation und Definition von  $s(\lambda), \sigma(\lambda)$ :



Möglichkeiten für eine Bijektion zwischen Partitionen mit gerader bzw. ungerader Anzahl:



Falls  $s(\lambda) \leq \sigma(\lambda)$ , verschiebe die  $s(\lambda)$ -Elemente neben  $\sigma(\lambda)$  (eines pro Zeile), falls hingegen  $s(\lambda) > \sigma(\lambda)$ , verschiebe  $\sigma(\lambda)$ -Elemente als neuen Summanden der Partition unter  $s(\lambda)$  dazu.

Diese Transformation bildet Partitionen mit ungerader Summandenzahl auf gerade Partitionen ab und umgekehrt.

In manchen Fällen funktioniert diese Bijektion nicht:

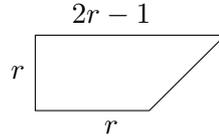
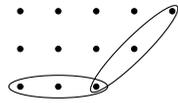
- Neue Partition nicht mehr sortiert bzw. Dimension geht sich nicht aus:



Bei  $r$  Summanden  $2r, 2r - 1, \dots, r + 1$ :

$$(r + 1) + \dots + 2r = \frac{r(3r + 1)}{2}.$$

- Es würden gleiche Summanden entstehen:



Bei  $r$  Summanden  $r, r + 1, \dots, 2r - 1$ :

$$r + (r + 1) + \dots + (2r - 1) = \frac{r(3r - 1)}{2}.$$

$$\begin{aligned} \sum_{m \in \mathbb{Z}} (-1)^m q^{\frac{m(3m-1)}{2}} &= \sum_{m \geq 1} (-1)^m q^{\frac{m(3m-1)}{2}} + 1 + \sum_{m \geq 1} (-1)^m q^{\frac{m(3m+1)}{2}} \\ &= 1 + \sum_{n \geq 1} (p_e(\mathcal{D}, n) - p_o(\mathcal{D}, n)) \cdot q^n \end{aligned}$$

Wir müssen noch zeigen, dass das gleich ist wie

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n).$$

Wenn  $t$  die Anzahl der Summanden zählt und man bei

$$\prod_{n \geq 1} (1 + tq^n)$$

$t \rightarrow -1$  setzt, erhält man  $(-1)^{\text{Anzahl Summanden}}$ , also genau den obigen Ausdruck.

Wir hatten bereits

$$(q; q)_{\infty} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} (-1)^m q^{\frac{m(3m+1)}{2}} = 1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - q^{12} - q^{15} \pm \dots$$

$$\frac{1}{(q; q)_{\infty}} = \sum_{n \geq 0} p(n)q^n = 1 + p(1)q + p(2)q^2 + \dots$$

Daraus folgt

$$1 = \sum_{m \in \mathbb{Z}} (-1)^m q^{\frac{m(3m+1)}{2}} \cdot \sum_{n \geq 0} p(n)q^n.$$

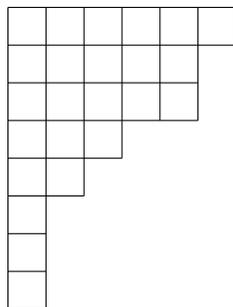
Koeffizientenvergleich für  $q^n$ ,  $n \geq 0$ :

$$0 = p(n) - p(n - 1) - p(n - 2) + p(n - 5) + p(n - 7) - \dots$$

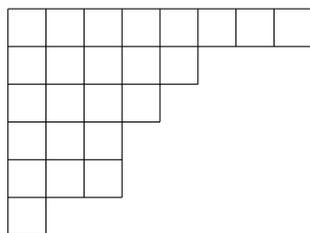
Daraus erhalten wir eine Rekursionsformel für  $p(n)$  aus vorherigen Werten. Die Rekursion ist nicht endlich, aber die Indizes werden sehr "sparse".

## 6.7 Partitionen mit Restriktionen

*Beispiel:*  $n = 24$ ,  $\lambda = (6, 5, 5, 3, 2, 1, 1, 1)$ . Statt mit Punkten kann man diese Partition auch mit kleinen Quadraten darstellen (*Ferrers-Diagramm*):



Man erhält die *konjugierte* Partition durch Vertauschen von Zeilen und Spalten, für unser Beispiel ist  $\lambda' = (8, 5, 4, 3, 3, 1)$ :



Restriktionen: Die Anzahl der Summanden soll  $\leq M$  sein, die einzelnen Summanden  $\leq N$ . Ferrers Diagramm lässt sich also in ein  $N \times M$ -Rechteck zeichnen (mit Einheitsquadraten).

Die größte Zahl, die sich so partitionieren lässt, ist offensichtlich  $N \cdot M$ .

Wir suchen die erzeugende Funktion

$$G(N, M; q) = \sum_{n \geq 0} p(N, M, n) q^n,$$

wobei  $p(N, M, n)$  die Partitionen von  $n$  mit obigen Restriktionen bezeichnet. Da nur endlich viele Zahlen (jene  $\leq N \cdot M$ ) so partitioniert werden können, ist das ein Polynom.

Es gilt die Symmetrie  $G(N, M; q) = G(M, N; q)$  (siehe konjugierte Partitionen).

**Satz 6.10:** Es ist

$$G(N, M; q) = \frac{(1 - q^{N+M}) \cdot (1 - q^{N+M-1}) \cdots (1 - q^{M+1})}{(1 - q^N) \cdot (1 - q^{N-1}) \cdots (1 - q)} = \frac{(q)_{N+M}}{(q)_N (q)_M}.$$

*Beweis:* Per Induktion. Sei

$$g(N, M; q) = \frac{(q)_{N+M}}{(q)_N (q)_M},$$

wir zeigen also  $g \equiv G$ . Wenn Anfangsbedingungen und Rekursionsvorschrift gleich sind, ist die Rekursion auch gleich.

Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned} G(N, 0; q) &= q^0 = 1 \\ g(N, 0; q) &= \frac{(q)_N}{(q)_N \cdot 1} = 1 \\ G(0, M; q) &= q^0 = 1 \\ g(0, M; q) &= \frac{(q)_M}{1 \cdot (q)_M} = 1 \end{aligned}$$

Betrachte jetzt die Differenz

$$\begin{aligned} g(N, M; q) - g(N, M-1; q) &= \frac{(q)_{N+M}}{(q)_N (q)_M} - \frac{(q)_{N+M-1}}{(q)_N (q)_{M-1}} \\ &= \frac{(q)_{N+M-1}}{(q)_N (q)_M} \cdot (1 - q^{N+M} - 1 + q^M) \\ &= \frac{(q)_{N+M-1}}{(q)_N (q)_M} \cdot q^M (1 - q^N) \\ &= \frac{q^M (q)_{N+M-1}}{(q)_{N-1} (q)_M} = q^M g(N-1, M; q). \end{aligned}$$

Dieselbe Rekursion wollen wir jetzt für  $G$  konstruieren, betrachte also

$$G(N, M; q) - G(N, M-1; q).$$

Dabei entspricht

$$p(N, M, n) - p(N, M-1, n)$$

der Anzahl der Partitionen von  $n$  in genau  $M$  Summanden, wobei jeder  $\leq N$  ist.

Falls wir in jeder Zeile (im Ferrers-Diagramm) das letzte Element entfernen (dh. jeden Summanden um 1 verringern), erhalten wir eine Partition von  $n - M$  in  $\leq M$  Summanden  $\leq N - 1$ , dh.  $p(N-1, M, n-M)$  Möglichkeiten.

In die erzeugende Funktion eingesetzt ergibt das

$$G(N, M; q) - G(N, M-1; q) = q^M G(N-1, M; q). \quad \square$$

*Anmerkung:* An der Rekursion sieht man auch, dass es sich um Polynome handelt.

## 6.8 Gauß-Polynome, $q$ -Binomialkoeffizienten

**Notation:** Gauß-Polynome,  $q$ -Binomial-Koeffizienten:

$$\begin{bmatrix} N \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{(q)_N}{(q)_k (q)_{N-k}}.$$

Gelegentlich verwendet man auch  $q$ -Faktorielle  $[n]_q!$  (siehe  $q$ -Analoge)

$$[n]_q = \frac{1 - q^n}{1 - q}, \quad [n]_q! = [1]_q \cdot [2]_q \cdots [n]_q.$$

Damit kann man die  $q$ -Binomialkoeffizienten auch schreiben als

$$\begin{bmatrix} N \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[N]_q!}{[k]_q! [N-k]_q!}.$$

Es gilt dann

$$\lim_{q \rightarrow 1} \begin{bmatrix} N \\ k \end{bmatrix}_q = \binom{N}{k}.$$

Rekursionen:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_q &= \begin{bmatrix} n-1 \\ m \end{bmatrix}_q + q^{n-m} \cdot \begin{bmatrix} n-1 \\ m-1 \end{bmatrix}_q \\ \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_q &= q^m \cdot \begin{bmatrix} n-1 \\ m \end{bmatrix}_q + \begin{bmatrix} n-1 \\ m-1 \end{bmatrix}_q \end{aligned}$$

Vergleiche auch Pascalsches Dreieck; Beweis in den Übungen.

**Satz 6.11** ( $q$ -Version des binomischen Lehrsatzes):

$$\begin{aligned} (z)_N &= (1-z)(1-zq) \cdots (1-zq^{N-1}) = \sum_{j=0}^N \begin{bmatrix} N \\ j \end{bmatrix}_q \cdot (-1)^j \cdot q^{\binom{j}{2}} z^j \\ \frac{1}{(z)_N} &= \sum_{j \geq 0} \begin{bmatrix} N+j-1 \\ j \end{bmatrix}_q z^j \end{aligned}$$

*Beweis:* Übung. □

*Anmerkung:* Für  $q \rightarrow 1$  entspricht die erste Formel dem binomischen Lehrsatz, die zweite (offensichtlich)

$$\frac{1}{(1-z)^N} = \sum_{j \geq 0} \binom{N+j-1}{j} z^j.$$

**Satz 6.12:**

$$\sum_{j=0}^m (-1)^j \begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix}_q = \begin{cases} (q; q^2)_n & m = 2n \\ 0 & m = 2n + 1 \end{cases}$$

*Beweis:* Betrachte

$$\begin{aligned} \sum_{m \geq 0} f(m) \frac{z^m}{(q)_m} &= \sum_{m \geq 0} \sum_{0 \leq j \leq m} (-1)^j \frac{(q)_m}{(q)_j (q)_{m-j}} \frac{z^m}{(q)_m} \\ &= \sum_{j \geq 0} \frac{(-1)^j z^j}{(q)_j} \sum_{m \geq j} \frac{z^{m-j}}{(q)_{m-j}} \end{aligned}$$

Mit Euler:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{(-z; q)_\infty} \cdot \frac{1}{(z; q)_\infty} \\ &= \prod_{n \geq 0} \frac{1}{1+zq^n} \cdot \frac{1}{1-zq^n} = \prod_{n \geq 0} \frac{1}{1-z^2q^{2n}} \\ &= \frac{1}{(z^2; q^2)_\infty} \end{aligned}$$

Euler:

$$= \sum_{n \geq 0} \frac{z^{2n}}{(q^2; q^2)_n}$$

Koeffizientengleich über die so erhaltene Gleichung

$$\sum_{m \geq 0} f(m) \frac{z^m}{(q)_m} = \sum_{n \geq 0} \frac{z^{2n}}{(q^2; q^2)_n}$$

bezüglich  $z^k$ : es muss  $f(m) = 0$  für  $m$  ungerade. Betrachte nun  $m = 2n$  gerade:

$$\frac{f(2n)}{(q)_{2n}} = \frac{1}{(q^2; q^2)_n}.$$

Also ist

$$\begin{aligned} f(2n) &= \frac{(q^2; q^2)_{2n}}{(q^2; q^2)_n} \\ &= \frac{(1-q)(1-q^2) \cdots (1-q^{2n})}{(1-q^2)(1-q^4) \cdots (1-q^{2n})} \\ &= (1-q)(1-q^3) \cdots (1-q^{2n-1}) \end{aligned}$$

□

## 6.9 Kombinatorische Beweise für Jacobis Tripelprodukt

*Beweis* (Nach Robin Chapman): Wir beweisen die folgenden Form:

$$\prod_{n \geq 1} (1 + xq^{2n-1}) (1 + x^{-1}q^{2n-1}) = \prod_{n \geq 1} \frac{1}{1 - q^{2n}} \cdot \sum_{m \in \mathbb{Z}} x^m q^{m^2}.$$

Auf der rechten Seite taucht die erzeugende Funktion für Partitionen auf,

$$\prod_{n \geq 1} \frac{1}{1 - q^{2n}} = \sum_{r \geq 0} p(r) q^{2r}.$$

Die rechte Seite ist damit gleich

$$\sum_{r \geq 0} \sum_{m \in \mathbb{Z}} p(r) x^m q^{m^2 + 2r}.$$

Betrachte nun die linke Seite:

$$\sum A(m, t) x^m q^t, \quad A(m, t) = |\mathcal{A}(m, t)|,$$

wobei  $\mathcal{A}(m, t)$  die Menge geordneter Paare  $(B, C)$  von endlichen Mengen von ungeraden natürlichen Zahlen ist, wobei

$$\begin{aligned} |B| - |C| &= m \in \mathbb{Z}. \\ \Sigma(B) + \Sigma(C) &= t, \end{aligned}$$

wobei  $\Sigma(X)$  die Summe aller Elemente von  $X$  ist. Wenn  $B, C$  ungerade Elemente enthalten, ist

$$|B| - |C| \equiv \Sigma(B) + \Sigma(C) \pmod{2}.$$

Wenn  $|B| - |C| = m \geq 0$ , dann muss mindestens eine der Mengen  $\geq |m|$  Elemente haben.

OBdA sei  $|B| \geq m$ .

$$B = \{1, 3, 5, \dots, 2m - 1\} \Rightarrow \Sigma(B) = m^2.$$

Linke Seite:

$$\sum_{m,t} A(m,t) x^m q^t,$$

mit  $A(m,t) = 0$  falls  $m \not\equiv t \pmod{2}$ , oder falls  $t < m^2$ .

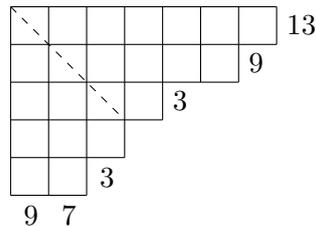
$A(m,t)$  sei die Anzahl der "Konfigurationen". Wir müssen zeigen

$$A(m, m^2 + 2r) = p(r), \quad m \in \mathbb{Z}, \quad r \geq 0.$$

Wir konstruieren eine Bijektion zwischen den Partitionen von  $r$ ,  $\mathcal{P}(r)$ , und  $\mathcal{A}(m, m^2 + 2r)$ .

Einfachster Fall:  $m = 0$ . Wir haben also zwei Mengen mit  $|B| = |C|$ .

*Beispiel:* Ferrers-Diagramm für  $r = 22 = 7 + 6 + 4 + 3 + 2$ :



Sei hier der Flächeninhalt pro Quadrat gleich 2, dh. pro Dreieck (halbiertem Quadrat) 1.

Durch Einzeichnen der Diagonale (die 3 Kästchen durchläuft) ergeben sich 3 vertikale und 3 horizontale "Streifen", deren Fläche berechnet wird. Diese Flächeninhalte (natürlich alle ungerade) sollen den Elementen der Mengen  $B, C$  entsprechen (es sind wegen der Diagonale gleich viele). In unserem Beispiel ist also

$$B = \{3, 9, 13\}, \quad C = \{3, 7, 9\}.$$

Da so die gesamte Fläche gezählt wird, ist

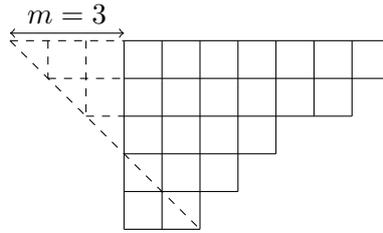
$$\Sigma(B) + \Sigma(C) = 2 \cdot 22 = 44.$$

Zumindest in unserem Beispiel ist also

$$A(0, 2r) = p(r),$$

das gilt aber auch allgemein.

Jetzt fehlen noch die Fälle  $m < 0$  und  $m > 0$  (symmetrisch). Betrachte als Beispiel  $m = 3$ .

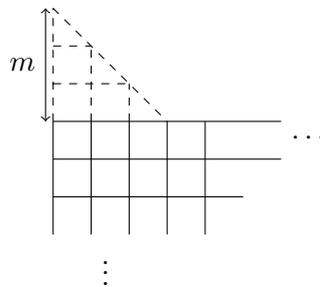


Das hinzugefügte große Dreieck besteht aus  $m^2 = 9$  kleinen Dreiecken; durch Verlängerung der Diagonale werden  $(5 - 3)^2 = 4$  Dreiecke separiert. Es ergeben sich 5 horizontale und  $2 = 5 - 3$  vertikale Streifen.  $B$  und  $C$  werden analog zu vorher definiert, dann

$$B = \{1, 5, 9, 15, 19\}, \quad C = \{1, 3\}, \quad \Sigma(B) + \Sigma(C) = 44 + 9.$$

Diese exemplarisch vorgestellte Methode funktioniert in beide Richtungen (zusammen mit den obigen Bedingungen, dh.  $m^2 \leq t$ ).

Für den Fall  $m < 0$  entweder Zeilen und Spalten vertauschen oder analog das Dreieck oben anfügen:



Damit ist eine Bijektion gefunden. □

*Beweis* (Nach George Andrews): Zu zeigen ist

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} z^n q^{n^2} = \prod_{n \geq 0} (1 - q^{2n+2}) (1 + z^{-1} q^{2n+1}).$$

Äquivalente Form (ersetze  $q$  durch  $\sqrt{q}$ , ersetze  $z$ ):

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} z^n q^{\binom{n}{2}} = (q; q)_\infty (-z; q)_\infty \left(-\frac{q}{z}; q\right)_\infty$$

Ersetze jetzt  $z$  durch  $zq$ , das ergibt

$$\frac{1}{(q; q)_\infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}} z^n q^{\binom{n+1}{2}} = (-zq; q)_\infty \left(-\frac{1}{z}; q\right)_\infty.$$

Diese Form wollen wir im Folgenden beweisen.

Sei  $\varphi(z)$  die linke Seite. Wir zeigen

$$\varphi(z) = z \cdot q \cdot \varphi(z \cdot q).$$

$$\begin{aligned} zq\varphi(zq) &= \frac{1}{(q; q)_\infty} zq \cdot \sum_{n \in \mathbb{Z}} z^n q^{n + \binom{n+1}{2}} \\ &= \frac{1}{(q; q)_\infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}} z^{n+1} q^{\binom{n+2}{2}} \end{aligned}$$

Wenn  $n$  ganz  $\mathbb{Z}$  durchläuft, dann auch  $n + 1$ :

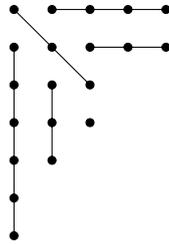
$$= \varphi(z).$$

Sei nun  $\varphi(z)$  die rechte Seite. Wir zeigen die gleiche Funktionalgleichung.

$$\begin{aligned} zq\varphi(zq) &= zq(-zq^2; q)_\infty \left(-\frac{1}{zq}; q\right)_\infty \\ &= zq \cdot \frac{(-zq; q)_\infty}{1+zq} \cdot \left(-\frac{1}{z}; q\right)_\infty \cdot \left(1 + \frac{1}{zq}\right) \\ &= (-zq; q)_\infty \left(-\frac{1}{z}; q\right)_\infty = \varphi(z). \end{aligned}$$

Wir müssen noch zeigen, dass die konstanten Terme auf beiden Seiten ebenfalls gleich sind.

Bilde dazu Partitionen auf *Frobenius-Symbole* ab. Exemplarisch:



Die horizontalen und vertikalen Streifen haben die Länge

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{horizontal,} \\ \text{vertikal.} \end{array}$$

Allgemein müssen diese Werte

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_r \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_r \end{pmatrix}$$

einige Restriktionen erfüllen:  $a_1 > a_2 > \dots > a_r \geq 0$ ,  $b_1 > b_2 > \dots > b_r \geq 0$ . Aus diesem Frobeniussymbol kann die zugehörige Partition eindeutig rekonstruiert werden.

Den konstanten Term erhalten wir wie folgt:

$$[z^0](-zq; q)_\infty (-z^{-1}; q)_\infty = [z^0] \prod_{n \geq 1} (1 + zq^n) \cdot \prod_{n \geq 1} (1 + z^{-1}q^{n-1})$$

Für den konstanten Term brauchen wir  $r$  Terme aus dem ersten Produkt und  $r$  aus dem zweiten,

$$q^{a_1+a_2+\dots+a_r} \cdot q^{b_1+b_2+\dots+b_r}.$$

Das ist einfach ein Frobeniussymbol:

$$\begin{pmatrix} a_1 - 1 & a_2 - 1 & \cdots & a_r - 1 \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_r \end{pmatrix}$$

Das ist äquivalent zu einer Partition von  $a_1 + \dots + a_r + b_1 + \dots + b_r$  (mit Diagonallänge  $r$ ). Die Summe der typischen Terme ist also

$$\sum_{n \geq 0} p(n)q^n = \frac{1}{(q; q)_\infty},$$

und letzteres ist genau der konstante Term der linken Seite,

$$[z^0] \frac{1}{(q; q)_\infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}} z^n q^{\binom{n+1}{2}} = \frac{1}{(q; q)_\infty} \cdot 1. \quad \square$$

*Anmerkung:* Wenn man in

$$\begin{bmatrix} m+n \\ m \end{bmatrix}_q$$

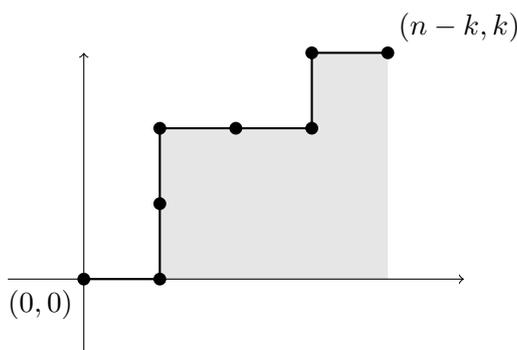
$m \rightarrow \infty$  gehen lässt, erhält man

$$\frac{(q)_{m+n}}{(q)_m (q)_n} \rightarrow \frac{(q)_\infty}{(q)_\infty (q)_n} = \frac{1}{(q)_n}.$$

## 6.10 Gitterpfade und $q$ -Binomialkoeffizienten

Starte bei  $(0, 0)$ , erlaubt sind horizontale und vertikale Schritte mit Länge 1. Ziel ist  $(n-k, k)$ , dafür gibt es  $\binom{n}{k}$  Möglichkeiten.

Uns interessiert allerdings die Fläche unterhalb des Pfades.



Wir verwenden eine Variable  $q$  zum Zählen der Fläche sowie  $x, y$  für die Schritte in Richtung  $x$  bzw.  $y$ . Die möglichen Zweierschritte sind dann

$$xx + xy + qyx + yy.$$

Multipliziere beispielsweise für drei Schritte  $(x+y)^3$  nicht-kommutativ aus:

$$(x+y)^3 = xxx + xxy + qxyx + xyy + q^2yxx + qyxy + q^2yyx + yyy.$$

Unser Kommutativitätsgesetz ist also

$$qxy = yx.$$

Wir suchen eine Formel der Form

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \cdot x^{n-k} y^k,$$

wobei

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$$

ein Polynom in  $q$  ist, das wir noch nicht kennen.

Wir versuchen es mit einer Art Induktion:

$$\begin{aligned}(x+y)^{n+1} &= (x+y)^n \cdot (x+y) \\ \sum \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k &= \sum \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \cdot x + \sum \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \cdot y \\ &= \sum \binom{n}{k} x^{n-k} x y^k q^k + \sum \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1}.\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} q^k + \binom{n}{k-1}.$$

Wir haben also eine erste Rekursionsformel gefunden.

Eine weitere Rekursionsformel erhält man durch

$$\begin{aligned}(x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n \\ \sum \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k &= x \sum \binom{n}{k} x^{n-k} y^k + y \sum \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \\ &= x \sum \binom{n}{k} x^{n-k} y^k + \sum q^{n-k} \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1}\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + q^{n+1-k} \binom{n}{k-1}.$$

Jetzt die Differenz zwischen den beiden Rekursionsformeln bilden und durch Iteration lösen:

$$\binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{n} = 1$$

Daraus folgt insgesamt (Übung)

$$\binom{n}{k} = \frac{(q)_n}{(q)_k (q)_{n-k}}.$$

$$(x+xy)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} (xy)^k,$$

wobei

$$(xy)^k = xy \cdot xy \cdots xy = x^k y^k q^{0+1+2+\dots+k-1} = x^k y^k q^{\binom{k}{2}},$$

also

$$(x+xy)^n = \sum \binom{n}{k} q^{\binom{k}{2}} x^{n-k} y^k.$$

Umformen der linken Seite:

$$\begin{aligned}(x+xy)^n &= (x+xy) \cdots (x+xy) \\ &= x(1+y) \cdot x(1+y) \cdots x(1+y) \cdot x(1+y)\end{aligned}$$

Lasse die  $x$  nach links wandern:

$$= x^n \cdot (1+q^{n-1}y) \cdot (1+q^{n-2}y) \cdots (1+qy) \cdot (1+y)$$

Jetzt können wir unsere vorige Rechnung vereinfachen:

$$(1+y)(1+qy)\cdots(1+q^{n-1}y) = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} q^{\binom{k}{2}} y^k.$$

*Anmerkung:* Auch von der *Vandermonde-Formel*,

$$\binom{m+n}{k} = \sum_i \binom{m}{i} \binom{n}{k-i},$$

existiert eine  $q$ -Version, siehe Übung.



# Kapitel 7

## Lagrange-Formeln

### 7.1 Lagrange-Inversions-Formel

**Satz 7.1** (Lagrange-Inversionsformel): Sei  $y = x\Phi(y)$ , wobei  $\Phi(y)$  eine gegebene Potenzreihe ist mit  $\Phi(0) \neq 0$ .

- Erste Version: Für  $n \geq 1$  gilt

$$[x^n]y = \frac{1}{n}[y^{n-1}](\Phi(y))^n.$$

- Zweite Version:

$$[x^n]y^p = \frac{p}{n}[y^{n-p}](\Phi(y))^n.$$

- Dritte Version: für eine Potenzreihe  $g(y)$  gilt

$$[x^n]g(y) = \frac{1}{n}[y^{n-1}]g'(y)(\Phi(y))^n,$$

wobei

$$g(y) = a_1y + a_2y^2 + \dots$$

*Anmerkung:* Die zweite Version wird in der Übung gezeigt, die dritte folgt unmittelbar aus der zweiten:

$$\begin{aligned} [x^n]g(y) &= \sum_{p \geq 1} a_p [x^n]y^p \\ &= \sum_{p \geq 1} a_p \frac{p}{n} [y^{n-p}](\Phi(y))^n \\ &= \frac{1}{n} [y^{n-1}]g'(y)(\Phi(y))^n. \end{aligned}$$

*Beweis* (Für die erste Version): Wir verwenden Cauchys Integrationsformel. Mit Hilfe der Voraussetzung lässt sich  $x$  schreiben als

$$x = \frac{y}{\Phi(y)}.$$

Die Ableitung nach  $y$  ist

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\Phi(y) - y\Phi'(y)}{\Phi^2(y)}.$$

Der Koeffizient von  $x^n$  in  $y$  ist (kleiner Kreis in der  $x$ -Ebene)

$$\begin{aligned} [x^n]y &= \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dx}{x^{n+1}} y \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dy}{y^{n+1}} \frac{\Phi(y) - y\Phi'(y)}{\Phi^2(y)} (\Phi(y))^{n+1} y \end{aligned}$$

Da  $\Phi(0) \neq 0$ , entspricht kleinem  $x$  auch kleines  $y$ ; kleiner Kreis in der  $y$ -Ebene:

$$\begin{aligned} &= [y^{n-1}] (\Phi^n(y) - y\Phi'(y)\Phi^{n-1}(y)) \\ &= [y^{n-1}]\Phi^n(y) - [y^{n-2}]\Phi'(y)\Phi^{n-1}(y) \\ &= [y^{n-1}]\Phi^n(y) - \frac{1}{n}[y^{n-2}]n\Phi'(y)\Phi^{n-1}(y) \\ &= [y^{n-1}]\Phi^n(y) - \frac{1}{n}[y^{n-2}]\frac{d}{dy}\Phi^n(y) \end{aligned}$$

Den Koeffizienten in der Ableitung kann man aus der ursprünglichen Funktion ablesen, nämlich  $[y^n]f'(y) = (n+1)[y^{n+1}]f(y)$ :

$$\begin{aligned} &= [y^{n-1}]\Phi^n(y) - \frac{n-1}{n}[y^{n-1}]\Phi^n(y) \\ &= \frac{1}{n}[y^{n-1}]\Phi^n(y). \quad \square \end{aligned}$$

*Beispiel* (Binärbäume): Darstellung als "symbolische Gleichung", ein Baum ist entweder leer (Blatt  $\square$ ) oder eine Wurzel  $\circ$  mit linkem und rechtem Teilbaum:

$$\mathcal{B} = \square + \begin{array}{c} \circ \\ \swarrow \quad \searrow \\ \mathcal{B} \quad \mathcal{B} \end{array}$$

Sei  $b_n$  die Anzahl von Binärbäumen mit  $n$  internen Knoten. Für die erzeugende Funktion  $B(z)$  erhalten wir aus der symbolischen Darstellung

$$\begin{aligned} B(z) &= 1 + zB^2(z), \\ B(z) &= \sum_{n \geq 0} b_n z^n. \end{aligned}$$

Eine mögliche Vorgehensweise ist die Lösung der quadratischen Gleichung:

$$B(z) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4z}}{2z}.$$

Lösung mit Hilfe der Lagrange-Formel: Wir suchen  $y = x\Phi(y)$ . Als Gleichung haben wir

$$B = 1 + zB^2.$$

Setze  $B = 1 + y$ , dann ist

$$y = z(1 + y)^2 \Rightarrow \Phi(y) = (1 + y)^2.$$

Dann gilt wegen Lagrange

$$\begin{aligned} [z^n]B(z) &= b_n = \frac{1}{n}[y^{n-1}](1 + y)^{2n} \\ &= \frac{1}{n} \binom{2n}{n-1} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}. \end{aligned}$$

Das sind die Catalanzahlen.

*Beispiel* ( $t$ -adische Bäume): Eine Wurzel hat nun  $t \geq 2$  Teilbäume, deren Reihenfolge wichtig ist. Analog zu vorher haben wir

$$B(z) = 1 + zB(z)^t.$$

Hier können wir jetzt keine Lösungsformel mehr anwenden, wir verwenden gleich die Lagrange-Formel. Setze wieder

$$B = 1 + y, \quad y = z(1 + y)^t, \quad \Phi(y) = (1 + y)^t.$$

Also folgt für  $n \geq 1$

$$\begin{aligned} [z^n]y &= [z^n]B = \frac{1}{n}[y^{n-1}](1 + y)^{tn} \\ &= \frac{1}{n} \binom{tn}{n-1}. \end{aligned}$$

*Beispiel:* Gesucht ist der Koeffizient von  $z^n$  in  $T$  für

$$T^3 - zT + z^2 = 0.$$

Ansatz:

$$T = t_0 + t_1z + t_2z^2 + \dots$$

Es muss wegen der Gleichung  $t_0 = 0$  und  $t_1 = 1$ , schreibe

$$T = z + zy.$$

Die Gleichung wird damit zu

$$\begin{aligned} z^3(1 + y)^3 - z^2(1 + y) + z^2 &= 0 \\ z(1 + y)^3 - y &= 0 \\ y &= z(1 + y)^3 \\ \Phi(y) &= (1 + y)^3 \end{aligned}$$

Daraus folgt für  $n \geq 2$

$$\begin{aligned} [z^n]T &= [z^n]z(1 + y) = [z^{n-1}](1 + y) = [z^{n-1}]y \\ &= \frac{1}{n-1}[y^{n-2}](\Phi(y))^{n-1} \\ &= \frac{1}{n-1}[y^{n-2}](1 + y)^{3n-3} \\ &= \frac{1}{n-1} \binom{3n-3}{n-2}. \end{aligned}$$

*Beispiel:*

$$\theta = \frac{x}{(1 - \theta)^2}, \quad P = (1 - \theta)(1 + 3\theta) = 1 + 2\theta - 3\theta^2.$$

Wir suchen  $[x^n]P$ . Aus der ersten Gleichung erhalten wir

$$\Phi(\theta) = (1 - \theta)^{-2}.$$

$$\begin{aligned} [x^n]P &= \frac{1}{n}[\theta^{n-1}]\frac{dP}{d\theta} \cdot (1 - \theta)^{-2n} \\ &= \frac{1}{n}[\theta^{n-1}](2 - 6\theta) \cdot (1 - \theta)^{-2n} \\ &= \frac{1}{n} \left( 2 \cdot [\theta^{n-1}](1 - \theta)^{-2n} - 6[\theta^{n-2}](1 - \theta)^{-2n} \right) \\ &= \frac{1}{n} \left( 2 \cdot \binom{3n-2}{n-1} - 6 \cdot \binom{3n-3}{n-2} \right). \end{aligned}$$

## 7.2 Lagrange-Bürmann-Formel

Für eine formale Potenzreihe  $F(y)$ :

$$y = x\Phi(y), \quad c_n = [y^n]F(y)\Phi^n(y),$$

$$\sum_{n \geq 0} c_n x^n = \frac{F(y)}{1 - x\Phi'(y)}.$$

*Beweis:* Potenzreihe in  $x$ :

$$f(y) = f(0) + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} x^n [y^{n-1}] \Phi^n(y) f'(y)$$

Ableiten nach  $x$ :

$$f'(y) \frac{dy}{dx} = \sum_{n \geq 0} x^n [y^n] \Phi^{n+1}(y) f'(y)$$

$$x = \frac{y}{\Phi(y)}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\Phi(y)} - \frac{y\Phi'(y)}{\Phi^2(y)} = \frac{1}{\Phi(y)} (1 - x\Phi'(y))$$

$$f'(y) \frac{\Phi(y)}{1 - x\Phi'(y)} = \sum_{n \geq 0} x^n [y^n] \Phi^{n+1}(y) f'(y)$$

Umtaufung  $F(y) = f'(y)\Phi(y)$ :

$$\frac{F(y)}{1 - x\Phi'(y)} = \sum x^n [y^n] \Phi^n(y) F(y)$$

Damit ist

$$c_n = [y^n] \Phi^n(y) F(y). \quad \square$$

*Beispiel* (Trinomial-Koeffizienten): Gesucht ist

$$[t^k](1 + t + t^2)^n.$$

Aufzeichnen analog zum Pascalschen Dreieck: summiere jeweils über drei Einträge,

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & 1 & & \\ & & & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ & & 1 & 3 & 6 & 7 & 6 & 3 & 1 \end{array}$$

Uns interessieren die mittleren Trinomialkoeffizienten (die mittlere Spalte). Sei

$$c_n = [t^n](1 + t + t^2)^n$$

$$\sum_{n \geq 0} c_n x^n = \frac{1}{1 - x(1 + 2y)}.$$

$$\Phi(t) = 1 + t + t^2, \quad F \equiv 1$$

$$y = x\Phi(y) = x(1 + y + y^2)$$

$$xy^2 + (x-1)y + x = 0 \Rightarrow y = \frac{1-x \pm \sqrt{1-2x-3x^2}}{2x}$$

$$x(1+2y) = x + 1 - x - \sqrt{1-2x-3x^2}$$

$$1 - x(1+2y) = \sqrt{1-2x-3x^2}$$

$$\sum_{n \geq 0} c_n x^n = \frac{1}{\sqrt{1-2x-3x^2}}.$$

*Beispiel* (Die Baum-Funktion):

*Anmerkung:* Das ist eine Variante von Lamberts  $W$ -Funktion.

Implizit definierte Funktion:

$$y = ze^y, \quad \Phi(y) = e^y.$$

Wir suchen

$$\begin{aligned} n![z^n]y &= n! \frac{1}{n} [y^{n-1}]e^{ny} \\ &= n! \frac{1}{n} \frac{n^{n-1}}{(n-1)!} = n^{n-1}. \end{aligned}$$

Damit werden Cayley-Bäume (nummerierte / gelabelte Wurzelbäume) gezählt.

- $n = 1$ : Ein Knoten, der ist Wurzel.
- $n = 2$ : Zwei Knoten, also  $2 = 2^1$  Möglichkeiten für Wurzel.
- $n = 3$ : Es gibt  $3!/2 = 3$  Möglichkeiten, die Labels zu verteilen, drei Möglichkeiten für die Wurzel, also  $9 = 3^2$  Möglichkeiten gesamt.

Allgemein die Anzahl nummerierter Bäume<sup>1</sup> ist  $n^{n-2}$ .

*Beispiel:*

$$H(x) = \sum_{n \geq 0} \binom{an}{n} x^n.$$

$$\binom{an}{n} = [y^n](1+y)^{an}$$

$$\Phi(y) = (1+y)^a, \quad F \equiv 1$$

$$H(x) = \frac{1}{1 - xa(1+y)^{a-1}}$$

Für  $a = 2$ :

$$y = x(1+y)^2$$

$$y = -1 + \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}$$

---

<sup>1</sup>John Moon, Counting Labelled Trees.

$$1 - x\Phi'(y) = 1 - 2x(1+y) = 1 - (1 - \sqrt{1-4x})$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-4x}} = \sum_{n \geq 0} \binom{2n}{n} x^n$$

*Beispiel:*

$$F(y) = (1+y)^a, \quad \Phi(y) = (1+y)^{-b}$$

Aus der dritten Version der Lagrangeschen Inversionsformel erhalten wir

$$\begin{aligned} (1+y)^a &= 1 + \sum_{n \geq 1} x^n \frac{1}{n} [y^{n-1}] a(1+y)^{a-1} (1+y)^{-bn} \\ &= 1 + \sum_{n \geq 1} x^n \frac{a}{n} \binom{a-1-bn}{n-1} \\ &= 1 + \sum_{n \geq 1} x^n \binom{a-bn}{n} \frac{a}{a-bn} = \sum_{n \geq 0} x^n \binom{a-bn}{n} \frac{a}{a-bn}. \end{aligned}$$

Setze

$$G_n(a, b) = \frac{a}{a-bn} \binom{a-bn}{n},$$

dann lässt sich obiges umschreiben als

$$(1+y)^a = \sum_{n \geq 0} G_n(a, b) x^n.$$

Wegen

$$(1+y)^{a+c} = (1+y)^a (1+y)^c$$

ist

$$\sum G_n(a+c, b) x^n = \sum G_n(a, b) x^n \cdot \sum G_n(c, b) x^n.$$

Koeffizientenvergleich:

$$G_n(a+c, b) = \sum_{k=0}^n G_k(a, b) \cdot G_{n-k}(c, b)$$

Spezialfall  $b = 0$ :

$$G_n(a, 0) = \binom{a}{n}$$

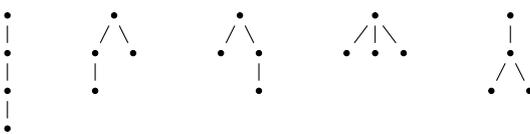
Daraus erhalten wir eine Verallgemeinerung der Vandermondeschen Konvolutions-Formel:

$$\binom{a+c}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{a}{k} \binom{c}{n-k}.$$

### 7.3 Planare Bäume und Narayana-Zahlen

*Beispiel (Planare Bäume):* Planare Bäume bestehen aus einer Wurzel und  $k \geq 0$  Teilbäumen, deren Reihenfolge relevant ist.

- $n = 1$ : 1 Baum:     •
- $n = 2$ : 1 Baum:     •

- $n = 3$ : 2 Bäume: 
- $n = 4$ : 5 Bäume: 
- ...

Symbolisch:

$$\mathcal{P} = \bullet + \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \mathcal{P} \end{array} + \begin{array}{c} \bullet \\ / \backslash \\ \mathcal{P} \quad \mathcal{P} \end{array} + \begin{array}{c} \bullet \\ / | \backslash \\ \mathcal{P} \quad \mathcal{P} \quad \mathcal{P} \end{array} + \dots$$

Wir zählen die Knoten im Exponenten:

$$P(z) = z + zP(z) + z(P(z))^2 + \dots = \frac{z}{1 - P(z)}.$$

Das passt genau ins Muster der Lagrange-Inversions-Formel:

$$\Phi(P) = \frac{1}{1 - P}, \quad P = z\Phi(P).$$

Wir erhalten

$$[z^n]P = \frac{1}{n}[P^{n-1}]\Phi^n = \frac{1}{n}[P^{n-1}](1 - P)^{-n} = \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1}.$$

Das sind wieder die *Catalan-Zahlen*.

*Beispiel* (Blätter von planaren Bäumen): Jetzt zählen wir die Blätter des Baums. Im Baum mit einem Knoten zählt auch die Wurzel als Blatt. Sei  $G_{n,k}$  die Anzahl der planaren Bäume mit  $n$  Knoten und  $k$  Blättern.

Bivariate erzeugende Funktion:

$$\begin{aligned} G(z, u) &= \sum_{n,k} G_{n,k} z^n u^k \\ &= zu + zG + zG^2 + \dots = zu + z \frac{G}{1 - G} \\ &= z\Phi(G), \quad \Phi(G) = u + \frac{G}{1 - G}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{n,k} &= [u^k][z^n]G(z, u) \\ &= [u^k] \frac{1}{n} [y^{n-1}] \left( u + \frac{y}{1-y} \right)^n = \frac{1}{n} [y^{n-1}][u^k] \left( u + \frac{y}{1-y} \right)^n \\ &= \frac{1}{n} [y^{n-1}] \binom{n}{k} \left( \frac{y}{1-y} \right)^{n-k} = \frac{1}{n} \binom{n}{k} [y^{k-1}] (1-y)^{-(n-k)} \\ &= \frac{1}{n} \binom{n}{k} \binom{n-2}{k-1}. \end{aligned}$$

Das sind die *Narayana-Zahlen*.

Beispiel (Abels Verallgemeinerung des Binomialsatzes):

$$F(y) = e^{ay}, \quad \Phi(y) = e^{-yz}, \quad y = xe^{-yz}$$

für einen Parameter  $z$ . Potenzreihe in  $x$ :

$$\begin{aligned} e^{ay} &= 1 + \sum_{n \geq 1} x^n \frac{1}{n} [y^{n-1}] e^{-nyz} a e^{ay} \\ &= 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{a}{n} x^n [y^{n-1}] e^{y(a-nz)} \\ &= 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{a}{n} x^n \frac{(a-nz)^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= \sum_{n \geq 0} x^n \frac{a(a-nz)^{n-1}}{n!} \\ &= \sum_{n \geq 0} y^n e^{nyz} \frac{a(a-nz)^{n-1}}{n!} \end{aligned}$$

Multiplikation mit  $e^{by}$ :

$$a^{(a+b)y} = \sum_{k \geq 0} y^k e^{y(b+zk)} \frac{a(a-kz)^{k-1}}{k!}$$

Koeffizientenvergleich für  $y^n$ :

$$\begin{aligned} \frac{(a+b)^n}{n!} &= \sum_{k=0}^n [y^{n-k}] e^{y(b+zk)} \frac{a(a-kz)^{k-1}}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(b+zk)^{n-k}}{(n-k)!} \frac{a(a-kz)^{k-1}}{k!} \\ (a+b)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a(a-kz)^{k-1} (b+zk)^{n-k} \end{aligned}$$

Für  $z = 0$  ist das einfach der Binomialsatz.

# Kapitel 8

## Kernel-Methode

### 8.1 Beispiel Gitterpfade

Wie bereits vorher betrachten wir Gitterpfade mit Schritten  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ , die bei  $(0, 0)$  starten, in  $(n, i)$  enden und dabei nie unter die  $x$ -Achse fallen.

$$f_i(z) = \sum_{n \geq 0} z^n (\text{Anzahl Pfade nach } (n, i) \text{ wie oben}).$$

Vor  $y = i$  muss man bei  $y = i + 1$  oder bei  $y = i - 1$  gewesen sein (bzw. für  $y = 0$  von  $y = 1$  kommen oder gerade gestartet sein),

$$\begin{aligned} f_i(z) &= z f_{i-1}(z) + z f_{i+1}(z), & i \geq 1 \\ f_0(z) &= 1 + z f_1(z). \end{aligned}$$

Wir betrachten wieder eine bivariate erzeugende Funktion,

$$F(z, x) = \sum_{i \geq 0} f_i(z) x^i.$$

Summation obiger Gleichungen zu einer Gesamtgleichung:

$$\begin{aligned} f_0(z) + \sum_{i \geq 1} f_i(z) x^i &= \sum_{i \geq 1} z f_{i-1}(z) x^i + \sum_{i \geq 1} z f_{i+1}(z) x^i + 1 + z f_1(z) x \\ F(z, x) &= z x \sum_{i \geq 1} f_{i-1}(z) x^{i-1} + 1 + \frac{z}{x} \sum_{i \geq 0} f_{i+1}(z) x^{i+1} \\ &= z x F(z, x) + 1 + \frac{z}{x} [F(z, x) - f_0(z)] \\ &= z x F(z, x) + 1 + \frac{z}{x} [F(z, x) - F(z, 0)] \\ F(z, x) \left( 1 - z x - \frac{z}{x} \right) &= 1 - \frac{z}{x} F(z, 0) \\ F(z, x) &= \frac{1 - \frac{z}{x} F(z, 0)}{1 - z x - \frac{z}{x}} \\ &= \frac{z F(z, 0) - x}{z x^2 - x + z} \end{aligned}$$

$x = 0$  einsetzen ist natürlich wenig sinnvoll; Nullstellen des Nenners:

$$zx^2 - x + z = 0 \Rightarrow \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4z^2}}{2z} \rightarrow \{r_1(z), r_2(z)\}$$

Damit erhalten wir

$$F(z, x) = \frac{zF(z, 0) - x}{z(x - r_1(z))(x - r_2(z))}.$$

$F(z, x)$  hat eine Potenzreihenentwicklung in  $x$  und  $z$ :

$$\begin{aligned} r_1(z) &\sim \frac{1 + \sqrt{1 - 4z^2}}{2z} \sim \frac{1}{z} + \dots \\ r_2(z) &\sim \frac{1 - \sqrt{1 - 4z^2}}{2z} \sim z + \dots \end{aligned}$$

Betrachte

$$\frac{1}{x - r_1}, \quad \frac{1}{x - r_2} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{x - \frac{1}{z}}, \quad \frac{1}{x - z}.$$

Letzterer Ausdruck hat um  $(0, 0)$  keine Potenzreihenentwicklung.

Also muss der Nenner diesen "bösen Faktor" eliminieren. Wenn also  $x = r_2(z)$ , muss der Nenner 0 sein. Also muss

$$\begin{aligned} zF(z, 0) - r_2(z) = 0 &\Rightarrow F(z, 0) = \frac{r_2(z)}{z} \\ &= \frac{1 - \sqrt{1 - 4z^2}}{2z^2} \end{aligned}$$

Das ist keine Überraschung, denn es ist

$$= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} z^{2n}.$$

Die Anzahl der Pfade von  $(0, 0)$  nach  $(2n, 0)$  ist

$$\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

Diese Vorgehensweise heißt Kernel-Methode.

$$\begin{aligned} F(z, x) &= \frac{zF(z, 0) - x}{z(x - r_1(z))(x - r_2(z))} \\ F(z, x) &= \frac{r_2(z) - x}{z(x - r_1(z))(x - r_2(z))} \\ &= \frac{1}{z(r_1(z) - x)} = \frac{1}{r_1(z)z \left(1 - \frac{x}{r_1(z)}\right)} \\ &= \frac{r_2(z)}{z(1 - xr_2(z))} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_i(z) &= [x^i]F(z, x) = \frac{r_2(z)}{z} (r_2(z))^i \\ &= \frac{1}{z} (r_2(z))^{i+1} = z^i \left( \frac{1 - \sqrt{1 - 4z^2}}{2z^2} \right)^{i+1}. \end{aligned}$$

Anmerkung:

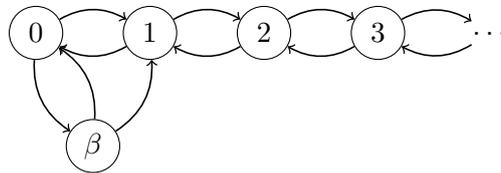
- Es ist eine gute Übung, das kombinatorisch zu erklären.
- Es ist interessant, die Koeffizienten von  $z^n$  in dieser Formel zu bestimmen (Übung).

## 8.2 Beispiel Bin Packing

Wir haben Kisten der Größe 1 und Items in den Größen  $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ . Die Items tauchen nacheinander (online) auf und müssen in dieser Reihenfolge verteilt werden.

Wenn  $\frac{1}{3}$  auftaucht, wird wenn möglich eine offene Kiste gefüllt. Bei  $\frac{2}{3}$  muss eine neue Kiste geöffnet werden, außer im Spezialfall  $\beta$ , wo bereits eine Kiste mit  $\frac{1}{3}$  vorliegt; diese Kiste kann noch mit  $\frac{2}{3}$  gefüllt werden.

Zustandsmodell:



Wir wollen wissen, in welchem Zustand  $i = \beta, 0, 1, 2, \dots$  wir nach  $n$  zufälligen Schritten sind (mit  $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$  gleich wahrscheinlich).

Analogie zu Gitterpfaden: die Zustandsnummern entsprechen der Höhe, wir wollen nicht unter die Nulllinie fallen.

Erzeugende Funktion:

$$f_i(z) = \sum_{n \geq 0} z^n (\# \text{ Pfade von Start nach } i \text{ in } n \text{ Schritten})$$

$$f_i(z) = z f_{i-1}(z) + z f_{i+1}(z), \quad i \geq 2$$

$$f_0(z) = 1 + z f_1(z) + z f_\beta(z)$$

$$f_1(z) = z f_0(z) + z f_2(z) + z f_\beta(z)$$

$$f_\beta(z) = z f_0(z).$$

Die Kernelmethode eignet sich zur Behandlung des Spezialfalls bei den Randbedingungen (mit  $\beta$ ). Sei nun

$$F(z, x) = \sum_{i \geq 0} f_i(z) x^i.$$

Wir summieren jetzt alle Rekursionen:

$$f_0(z) + x f_1(z) + \sum_{i \geq 2} x^i f_i(z) = z \sum_{i \geq 2} x^i f_{i-1}(z) + z \sum_{i \geq 2} x^i f_{i+1}(z)$$

$$+ z f_1(z) + z^2 f_0(z) + 1 + x z f_0(z) + x z f_2(z) + x z^2 f_0(z)$$

$$F(z, x) = z x F(z, x) + \frac{z}{x} F(z, x) + \text{einige Korrekturterme}$$

$$F(z, x) = \frac{z(1 - x(1+x)z)F(z, 0) - x}{x^2 z - x + z}.$$

Der Nenner lässt sich zu faktorisieren zu

$$z(x - r_1(z))(x - r_2(z)), \quad r_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4z^2}}{2z}.$$

Wie vorher ist ein Faktor,  $x - r_2(z)$ , "böse" und hat keine Potenzreihenentwicklung um  $(0, 0)$ , muss sich also wegekürzen.  $x = r_2(z)$  im Zähler eingesetzt ergibt 0,

$$z(1 - r_2(z)(1 + r_2(z))z)F(z, 0) - r_2(z) = 0.$$

Daraus erhalten wir  $F(z, 0)$  (Übung), einsetzen ergibt  $F(z, x)$ .

### 8.3 Beispiel Banachs Streichholzsachtel-Problem

Banach hat, als Raucher, in beiden Hosentaschen je eine Streichholzsachtel mit je einer gewissen Anzahl  $m, n$  an Streichhölzern. Zum Rauchen wählt er jeweils zufällig eine der beiden Schachteln aus und entnimmt ein Streichholz. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Anzahl der übrigen Streichhölzer in der einen Schachtel zu dem Zeitpunkt, zu dem die andere Schachtel leer wird.

Sei  $m \geq n$ . Wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion  $\Phi_{m,n}(u)$ : der Koeffizient von  $u^i$  ist die Wahrscheinlichkeit, dass  $i$  Streichhölzer in der nichtleeren Schachtel übrig sind.

$$\begin{aligned} \Phi_{m,n}(u) &= \frac{1}{2}\Phi_{m-1,n}(u) + \frac{1}{2}\Phi_{m,n-1}(u), & m > n \geq 1 \\ \Phi_{m,m}(u) &= \Phi_{m,m-1}(u), & m \geq 1 \\ \Phi_{m,0}(u) &= u^m, & m \geq 0 \end{aligned}$$

Wir fassen das zu einer großen erzeugenden Funktion zusammen:

$$F(z, x) = \sum_{m \geq n \geq 0} \Phi_{m,n}(u) z^m x^{m-n}$$

$x^{m-n}$  zur Behandlung des Spezialfalls  $m = n$  ( $x = 0$ ). Summieren aller Gleichungen ergibt schlussendlich (Details in der Übung):

$$F(z, x) = \frac{\frac{x}{1-zxu}(zx - 2) + (1-x)F_0(x) + x}{zx^2 - 2x + 1}, \quad F_0(z) = F(z, 0).$$

Nenner nullsetzen:

$$zx^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4z}}{2z} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - z}}{z} = r_{1,2}(z).$$

Die Faktorisierung des Nenners ist folglich

$$z(x - r_1(z))(x - r_2(z)).$$

Der Faktor  $(x - r_2(z))$  muss sich wieder wegekürzen,  $x = r_2(z)$  muss den Zähler nullsetzen, berechne daraus  $F(z, 0)$  und daraus  $F(z, x)$ .

# Kapitel 9

## Folgen von Binomialtyp, Operatorkalkül

### 9.1 Polynomfamilien-Typen

Sei  $p(x)$  ein Polynom mit reellen Koeffizienten.

**Definition 9.1** (Basis): Eine Familie von Polynomen  $\{p_n(x) \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ ,

$$\deg p_n(x) = n, \quad \deg a = 0, \quad \deg 0 = -1,$$

bildet eine *Basis* für den Vektorraum der Polynome,  $\mathbb{R}[x]$ .

*Beispiel* (Basen):

- $\{x^n\}$ , Monome,
- $\{x^{\underline{n}}\}$ , fallende Faktorielle als Exponenten,
- $\{x^{\overline{n}}\}$ , steigende Faktorielle als Exponenten.

Der Basiswechsel funktioniert mit Hilfe der Stirlingzahlen.

**Definition 9.2** (Binomialtyp): Die Polynomfamilie ist von *Binomialtyp*, falls für  $n \geq 0$  gilt

$$p_n(x+y) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p_k(x) p_{n-k}(y), \quad p_0(x) = 1.$$

*Beispiel* (Polynomfamilien von Binomialtyp):  $\{x^n\}$  ist von Binomialtyp (üblicher Binomialsatz).

$\{x^{\underline{n}}\}$  ebenfalls: Zu zeigen ist

$$(x+y)^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{\underline{k}} y^{\underline{n-k}}.$$

Das ist äquivalent zu

$$\frac{(x+y)^{\underline{n}}}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{x^{\underline{k}}}{k!} \frac{y^{\underline{n-k}}}{(n-k)!}.$$

Wegen

$$\frac{x^{\underline{k}}}{k!} = \frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!} = \binom{x}{k}$$

ist das äquivalent zu der Vandermonde-Konvolutions-Formel,

$$\binom{x+y}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{x}{k} \binom{y}{n-k}.$$

$\{x^{\bar{n}}\}$  ist ebenfalls von Binomialtyp, was sich wegen

$$x^{\bar{n}} = (-x)^n (-1)^n$$

leicht überprüfen lässt.

Im Allgemeinen ist es schwerer, diese Eigenschaft zu prüfen, wir hätten gerne eine einfachere Methode.

**Definition 9.3:** Eine Polynomfamilie heißt *normalisiert*, wenn

$$p_0(x) = 1, \quad p_n(0) = 0 \quad n \geq 1.$$

Eine Familie von Binomialtyp ist normalisiert. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.

Einfaches Gegenbeispiel:  $\{1, x, 2x^2, x^3, x^4, \dots\}$  ist nicht von Binomialtyp.

*Beweis:*  $p_0(x) = 1$  laut Definition.

$$p_1(0) = p_1(0)p_0(0) + p_0(0)p_1(0) = 2p_1(0) \Rightarrow p_1(0) = 0.$$

Induktion: sei  $p_1(0), \dots, p_{n-1}(0) = 0$ . Dann ist

$$p_n(0) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p_k(0) p_{n-k}(0) = 2p_n(0) \Rightarrow p_n(0) = 0. \quad \square$$

## 9.2 Operatoren

**Definition 9.4:** Ein linearer Operator  $P : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}[x]$  ist von *Differentialtyp*, wenn

$$\deg Pp(x) = \deg p(x) - 1.$$

*Beispiel* (Operatoren von Differentialtyp):

- Übliche Differentiation  $D = \frac{d}{dx}$ ,
- $\Delta : p(x) \mapsto p(x+1) - p(x)$ ,
- $\nabla : p(x) \mapsto p(x) - p(x-1)$ .
- $E : p(x) \mapsto p(x+1)$  ist nicht von Differentialtyp (Shift-Operator, Translation).
- $E^a : p(x) \mapsto p(x+a)$ ,
- $E^0 = I$  (Identität),
- $\Delta = E - I$ ,
- $\nabla = I - E^{-1}$ .

**Definition 9.5** (Basisoperator, Basisfamilie): Zu jeder Polynomfamilie  $\{p_n(x)\}$  lässt sich ein eindeutiger Operator  $P$  assoziieren, so dass

$$Pp_0(x) = 0, \quad Pp_n(x) = np_{n-1}(x), \quad n \geq 1$$

(Operator so definieren und über Linearität erweitern).  $P$  heißt *Basisoperator* der Familie. Umgekehrt heißt  $\{p_n(x)\}$  *Basisfamilie* von  $P$ .

**Satz 9.1:** Jede Polynomfamilie hat einen eindeutigen Basisoperator von Differentialtyp. Jeder differenzielle Operator hat eine eindeutige normalisierte Basis-Familie. Die Verbindung zwischen Basisoperator und Basisfamilie ist eine Bijektion zwischen der Menge der differenziellen Operatoren und der Menge der normalisierten Familien.

*Beispiel* (Basisoperatoren und ihre Basisfamilien):

- $\{x^n\} \leftrightarrow D$ ,
- $\{x^n\} \leftrightarrow \Delta$ , denn  $x^0 = 1, \Delta 1 = 0$  und für  $n \geq 1$

$$\Delta x^n = Ex^n - Ix^n = (x+1)^n - x^n = x^{n-1}[x+1 - (x-n+1)] = n \cdot x^{n-1},$$

- $\{x^{\bar{n}}\} \leftrightarrow \nabla$ .

Wir beginnen jetzt bei so einem Operator und konstruieren daraus eine eindeutige normalisierte Familie von Polynomen  $\{p_n(x)\}$ , so dass

$$Pp_n(x) = np_{n-1}(x).$$

*Beweis:* Definiere

$$p_0(x) = 1, \quad p_1(x) = \frac{x}{Px} \Rightarrow Pp_1(x) = \frac{1}{Px}Px = 1.$$

Induktion: sei  $p_0, \dots, p_{n-1}$  bereits entsprechend der gewünschten Eigenschaften konstruiert. Ansatz:

$$p_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k x^k.$$

$Px^k$  ist eine Linearkombination von  $p_0, \dots, p_{n-1}$  (diese bilden eine Basis der Polynome von Grad  $\deg Px^k$ ). Es soll

$$Pp_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k Px^k \stackrel{!}{=} np_{n-1}(x).$$

Durch Koeffizientenvergleich können wir die Unbekannten  $a_1, \dots, a_n$  berechnen. □

Wir haben also eine Bijektion zwischen normalisierten Familien und differenziellen Basis-Operatoren.

**Satz 9.2** (Verallgemeinerte Taylor-Entwicklung für Polynome): Ein beliebiges Polynom  $q(x)$  hat bezüglich des entsprechenden Basisoperators  $P$  für  $(p_k)$  eine eindeutige Darstellung

$$q(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{[P^k q(x)]_{x=0}}{k!} p_k(x).$$

*Anmerkung:* Ein Spezialfall davon ist die übliche Taylor-Entwicklung,

$$q(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{q^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

*Anmerkung:* Konvergenz ist nicht relevant, da es sich bei den Summen eigentlich um endliche Summen handelt, da der Operator den Grad des Polynoms verringert.

*Beweis:* Es reicht aus, die Aussage für eine Basis zu zeigen. Wir wählen  $q(x) = p_n(x)$ .

$$P^k p_n(x) = n^k p_{n-k}(x)$$

$$\frac{[P^k p_n(x)]_{x=0}}{k!} = \begin{cases} 0 & k \neq n \\ 1 & k = n \end{cases}$$

$$\Rightarrow p_n(x) = \sum \dots = p_n(x) \quad \square$$

*Beispiel:* Betrachte das Polynom  $x^n$  bezüglich

$$p_n(x) = x^n, \quad P = \Delta.$$

Für den Operator gilt

$$\Delta = E - I$$

$$\Delta^k = (E - I)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} E^i (-1)^{k-i}.$$

Letzteres ist der Binomialsatz ( $E$  und  $I$  kommutieren).

$$\frac{[\Delta^k x^n]_{x=0}}{k!} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^{k-i} i^n.$$

$x^n$  lässt sich dann darstellen als

$$x^n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^{k-i} i^n \cdot x^k.$$

Diese Darstellung kennen wir bereits mit den Stirling-Zahlen,

$$x^n = \sum \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} x^k,$$

damit haben wir bewiesen

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^{k-i} i^n.$$

**Notation:** Wir schreiben im Folgenden

$$L f(x) = f(0), \quad L^y f(x) = f(y), \quad L^y = L E^y.$$

Bis jetzt hatten wir

$$q(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{LP^k q(x)}{k!} p_k(x).$$

Verwende nun die Operator-Identität

$$I = \sum_{k \geq 0} \frac{p_k(x)}{k!} LP^k.$$

**Definition 9.6** (Shift- / Translations-invariant): Der Operator  $P$  heißt *Shift-invariant* oder *Translations-invariant* genau dann, wenn

$$\forall a \in \mathbb{R} : PE^a = E^a P.$$

*Beispiel* (Shift-invariante Operatoren):

- $D \checkmark$
- $\Delta = E - I, \Delta E^a = (E - I)E^a = E^{a+1} - E^a = E^a \Delta \checkmark$
- $\nabla \checkmark$

**Definition 9.7** ( $\Delta$ -Operator): Wenn ein Shift-invarianter Operator  $P$  zusätzlich erfüllt

$$Px = c \neq 0,$$

dann heißt  $P$   $\Delta$ -Operator.

**Satz 9.3:** Eine Polynomfamilie ist genau dann von Binomialtyp, wenn der zugehörige Basisoperator ein  $\Delta$ -Operator ist.

*Beweis:*

“ $\Rightarrow$ ” Weil  $P$  von Differentialtyp ist, gilt  $Px = c \neq 0$  und  $p_0(x) = 1$ .

$$\begin{aligned} E^y p_n(x) &= p_n(x+y) = \sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} p_{n-k}(y) p_k(x) \\ &= \sum_{k \geq 0} \frac{LE^y P^k p_n(x)}{k!} p_k(x) \\ n p_{n-1}(x) &= E^y P p_n(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{LE^y P^k n p_{n-1}(x)}{k!} p_k(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{LE^y P^{k+1} p_n(x)}{k!} p_k(x) \\ &= \sum_{k \geq 0} \frac{LE^y P^{k+1} p_n(x)}{(k+1)!} (k+1) p_k(x) = \sum_{k \geq 1} \frac{LE^y P^k p_n(x)}{k!} k p_{k-1}(x) \\ &= \sum_{k \geq 1} \frac{LE^y P^k p_n(x)}{k!} P p_k(x) = P \sum_{k \geq 1} \frac{LE^y P^k p_n(x)}{k!} p_k(x) \\ &= PE^y p_n(x). \end{aligned}$$

Wir haben also

$$E^y P p_n(x) = PE^y p_n(x).$$

Weil die  $p_n(x)$  eine Basis bilden, gilt die Aussage für beliebige Polynome.

“ $\Leftarrow$ ” Sei  $P$  ein  $\Delta$ -Operator (daher auch von Differentialtyp). Betrachte  $p_n(x+y)$  mit  $x$  eine Variable,  $y$  ein Parameter. Taylor-Entwicklung:

$$\begin{aligned} p_n(x+y) &= \sum_{k \geq 0} \frac{LP^k p_n(x+y)}{k!} p_k(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{LP^k E^y p_n(x)}{k!} p_k(x) \\ &= \sum_{k \geq 0} \frac{LE^y n^{\underline{k}} p_{n-k}(x)}{k!} p_k(x) = \sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} p_{n-k}(y) p_k(x). \quad \square \end{aligned}$$

*Beispiel:* Binomialsätze:

$$\begin{aligned} (x+y)^n &= \sum \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \\ (x+y)^{\underline{n}} &= \sum \binom{n}{k} x^{\underline{k}} y^{\underline{n-k}} \\ (x+y)^{\bar{n}} &= \sum \binom{n}{k} x^{\bar{k}} y^{\bar{n-k}}. \\ Q &= E^a D = DE^a. \end{aligned}$$

Behauptung: die zugehörigen Basispolynome sind die *Abel-Polynome*,

$$p_n(x) = x(x-an)^{n-1}.$$

$$\begin{aligned} Qp_n(x) &= E^a [(x-an)^{n-1} + x(n-1)(x-an)^{n-2}] \\ &= E^a (x-an)^{n-2} (x-an + xn - x) \\ &= E^a (x-an)^{n-2} (x-a) \cdot n = x(x+a-an)^{n-2} \cdot n \\ &= np_{n-1}(x). \end{aligned}$$

*Anmerkung:* Dazu bekommen wir frei Haus die Identität

$$(x+y)(x+y-an)^{n-1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x(x-ak)^{k-1} y(y-a(n-k))^{n-k-1}.$$

Das ist eine Variante von *Abels verallgemeinertem Binomialsatz*.

*Anmerkung:* Wende die verallgemeinerte Taylor-Entwicklung auf  $(x+y)^n$  an, wieder für eine Variable  $x$  und einen Parameter  $y$ ,  $Q = DE^a$ ,  $p_k(x) = x(x-ak)^{k-1}$ :

$$\begin{aligned} (x+y)^n &= \sum_{k \geq 0} \frac{LQ^k (x+y)^n}{k!} x(x-ak)^{k-1} \\ Q^k &= (E^a D)^k = E^{ak} D^k \\ Q^k (x+y)^k &= E^{ak} n^{\underline{k}} (x+y)^{n-k} = n^{\underline{k}} (y+ak+x)^{n-k} \\ (x+y)^n &= \sum_{k \geq 0} \frac{n^{\underline{k}} (y+ak)^{n-k}}{k!} x(x-ak)^{k-1} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x(x-ak)^{k-1} (y+ak)^{n-k}. \end{aligned}$$

Das ist jetzt *Abels verallgemeinerter Binomialsatz*.

Sei  $\mathcal{S}$  die Familie der Shift-invarianten Operatoren.

$$P_1 = P_2 \Leftrightarrow LP_1 = LP_2.$$

Warum? Die Hinrichtung ist offensichtlich, zur Rückrichtung:

$$LP_1E^y = LP_2E^y,$$

$$LE^yP_1 = LE^yP_2.$$

Wenn man das auf  $f(x)$  anwendet, erhalten wir  $f(y)$  (für alle  $y$ ). Also ist  $P_1 = P_2$ .

**Satz 9.4** (Expansionssatz):  $P \in \mathcal{S}$ , dann

$$P = \sum_{k \geq 0} \frac{a_k}{k!} D^k$$

mit

$$a_k = \left[ Px^k \right]_{x=0} = LPx^k.$$

*Beweis:* Es reicht aus, die Aussage für eine Basis, hier  $x^n$ , zu zeigen.

$$Px^n, \quad D^k x^n = n^{\underline{k}} x^{n-k}.$$

$$a_n = LPx^n, \quad L \sum_{k \geq 0} \frac{a_k}{k!} D^k x^n = L \sum_{k \geq 0} a_k \binom{n}{k} x^{n-k} = a_n.$$

Also ist  $LP = L \sum \dots$ , und da es sich um Shift-invariante Operatoren handelt, folgt daraus  $P = \sum \dots$   $\square$

Wir assoziieren mit jedem Operator  $P \in \mathcal{S}$  eine formale Potenzreihe  $p(t)$ , den *Indikator* von  $P$ :

$$p(t) = \sum_{k \geq 0} \frac{a_k}{k!} t^k.$$

Multiplikation:

$$f(t) = \sum a_n \frac{t^n}{n!}, \quad g(t) = \sum b_n \frac{t^n}{n!}$$

$$f(t) \cdot g(t) = \sum_{n \geq 0} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k b_{n-k} \frac{t^n}{n!}$$

Zugehöriger Operator:

$$\sum_{n \geq 0} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k b_{n-k} \frac{D^n}{n!}$$

Andererseits ist

$$\sum_{n \geq 0} b_n \frac{D^n}{n!} \sum_{n \geq 0} a_n \frac{D^n}{n!} = \sum_{n \geq 0} \frac{D^n}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k b_{n-k}.$$

Zwei Operatoren in  $\mathcal{S}$  kommutieren.

Der Operator, der  $f(t) \cdot g(t)$  entspricht, und das Produkt der Operatoren, die  $f(t)$  und  $g(t)$  entsprechen, sind gleich (wende beide auf  $x^n$  an, auch für Linearkombinationen stimmt das Ergebnis dann).

Betrachte nun die Inverse der formalen Potenzreihe,

$$\frac{1}{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots}$$

Handelt es sich dabei wieder um eine formale Potenzreihe, dh. von der Form  $b_0 + b_1 t + \dots$ ? Wie erhält man  $b_i$  aus  $a_j$ ?

Die formale Potenzreihe ist genau dann invertierbar, wenn  $a_0 \neq 0$ . Ein invertierbarer Operator entspricht einem invertierbaren Indikator.

*Beispiel:*  $D$ , dh. die Potenzreihe  $t$ , ist nicht invertierbar.

**Korollar 9.5:** Sei

$$P = \sum_{k \geq 0} \frac{a_k}{k!} D^k \in \mathcal{S}.$$

Dann gilt:

1.  $\deg(Pq(x)) \leq \deg(q(x))$  für alle  $q(x) \in \mathbb{R}[x]$ .
2.  $P$  invertierbar  $\Leftrightarrow a_0 \neq 0 \Leftrightarrow \deg(Pq(x)) = \deg(q(x))$  für alle  $q(x)$
3.  $P$  ist  $\Delta$ -Operator  $\Leftrightarrow a_0 = 0, a_1 \neq 0 \Leftrightarrow P = DT$  mit  $T \in \mathcal{S}$  invertierbar.

*Beweis:* ... □

*Beispiel:*  $E^a: a_n = LE^a x^n = a^n$ ,

$$E^a = \sum_{n \geq 0} \frac{a^n}{n!} D^n.$$

Der entsprechende Indikator ist

$$\sum_{n \geq 0} \frac{a^n t^n}{n!} = e^{at}.$$

In einem formalen Sinne gilt also

$$E^a = e^{aD}.$$

Das ist einfach der Taylor-Satz für Polynome.

Wir führen nun  $P'$  ein, indem wir den Indikator  $p(t)$  differenzieren und dann wieder  $t \mapsto D$  ersetzen.

Regeln:

- $(P + Q)' = P' + Q'$ ,
- $(cP)' = cP'$ ,
- $(PQ)' = PQ' + P'Q$ ,
- $(P^n)' = nP^{n-1}P'$ .

Die Ableitung eines  $\Delta$ -Operators ist invertierbar.

*Beispiel* (Ableitungen von Operatoren):

- $(E^a)' = (e^{aD})' = ae^{aD} = aE^a$ .
- $\Delta = E - I \rightarrow e^t - 1, \Delta' = e^D = E$ .
- $\nabla = I - E^{-1}, \nabla' = e^{-D} = E^{-1}$ .

$$Pp_n(x) = np_{n-1}(x).$$

Multiplikationsoperator:  $\underline{x} : p(x) \mapsto xp(x)$ .

**Satz 9.6:** Sei  $P \in \mathcal{S}$ . Dann ist

$$P' = P\underline{x} - \underline{x}P.$$

*Beweis* (Beweisskizze): Man sieht leicht, dass  $P\underline{x} - \underline{x}P \in \mathcal{S}$  (auf Polynom anwenden, ..., Übung).

Es ist

$$\begin{aligned} P &= \sum_{k \geq 0} \frac{a_k}{k!} D^k, & a_k &= LPx^k \\ \Rightarrow P' &= \sum_{k \geq 1} \frac{LPx^k}{(k-1)!} D^{k-1}. \end{aligned}$$

Offensichtlich

$$L\underline{x}P = 0.$$

$$P\underline{x} - \underline{x}P = \sum_{k \geq 0} \frac{L(P\underline{x} - \underline{x}P)x^k}{k!} D^k = \sum_{k \geq 0} \frac{LP\underline{x}x^k}{k!} D^k = \sum_{k \geq 0} \frac{LPx^{k-1}}{k!} D^k.$$

Das ist dasselbe wie obiges Ergebnis für  $P'$ . □

**Satz 9.7:** Sei  $P = DT$  ein  $\Delta$ -Operator. Die Basisfolge

$$\{p_n(x) \mid n \in \mathbb{N}_0\}$$

von  $P$  ist gegeben durch:

1.  $p_0(x) = 1$ ,  $p_n(x) = x(P')^{-1}p_{n-1}(x)$  für  $n \geq 1$  (*Rodrigues' Formel*)
2.  $p_0(x) = 1$ ,  $p_n = xT^{-n}x^{n-1}$  für  $n \geq 1$  (*Steffensens Formel*)

*Anmerkung:*  $T^{-n} := (T^{-1})^n$ .

*Beispiel* (Abel-Operator):  $P = DE^a$ : verwende Steffensens Formel, wobei  $T = E^a$ , also  $T^{-n} = E^{-an}$ :

$$\begin{aligned} p_0(x) &= 1 \\ p_n(x) &= xE^{-an}x^{n-1} = x(x - an)^{n-1}. \end{aligned}$$

Das passt zu unseren früheren Ergebnissen.

*Beispiel:*  $P = \Delta$ ,  $P' = E$ : verwende Rodrigues' Formel,

$$p_n(x) = xE^{-1}p_{n-1}(x) = xp_{n-1}(x-1)$$

Iteriere diese Rekursionsformel:

$$p_n(x) = x(x-1)(x-2) \cdots (x-n+1)p_0(x-n) = x^n.$$

*Beweis:*

1. Beweis für Rodrigues' Formel: Wir nehmen an, dass  $p_n(x)$  wie in Rodrigues' Formel definiert ist, und zeigen, dass dann  $Pp_n(x) = np_{n-1}(x)$ .

$$\begin{aligned} P\underline{x}(P')^{-1} &= (xP + P')(P')^{-1} \\ &= \underline{x}P(P')^{-1} + I. \end{aligned}$$

Induktion nach  $n$ :

$$\begin{aligned} Pp_n(x) &= (P\underline{x}(P')^{-1})p_{n-1}(x) \\ &= (\underline{x}P(P')^{-1} + I)p_{n-1}(x) \end{aligned}$$

Induktionshypothese:

$$\begin{aligned} &= (n-1)x(P')^{-1}p_{n-2}(x) + p_{n-1}(x) \\ &= np_{n-1}(x). \end{aligned} \quad \square$$

2. Beweis für Steffensens Formel:

$$\begin{aligned} \underline{x}T^{-n+1} &= T^{-n+1}\underline{x} - (T^{-n+1})' \\ &= T^{-n+1}\underline{x} + (n-1)T^{-n}T' \\ &= T^{-n}(T\underline{x} + (n-1)T'). \end{aligned}$$

Verwende die Rodrigues-Formel sowie die Induktionshypothese:

$$\begin{aligned} p_n(x) &= \underline{x}(P')^{-1}p_{n-1}(x) = \underline{x}(P')^{-1}xT^{-n+1}x^{n-2} \\ &= \underline{x}(P')^{-1}T^{-n}(T\underline{x} + (n-1)T')x^{n-2} = \underline{x}(P')^{-1}T^{-n}(T + T'D)x^{n-1} \\ &= \underline{x}(P')^{-1}T^{-n}P'x^{n-1} = xT^{-n}x^{n-1} \end{aligned} \quad \square$$

# Kapitel 10

## Bernoullizahlen und Polynome

### 10.1 Reihenentwicklungen für Winkelfunktionen

Betrachte

$$z = (e^z - 1) \sum_{n \geq 0} B_n \frac{z^n}{n!}.$$

Koeffizientenvergleich für  $\frac{z^n}{n!}$  (unter Verwendung von Iversons Notation):

$$[n = 1] = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k - B_n$$

$$B_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k \quad n \geq 2, \quad B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}.$$

Aus dieser Rekursion kann man zwar leider nicht direkt  $B_n$  berechnen, aber zumindest  $B_{n-1}$ .

$$\begin{aligned} \frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{2} &= \frac{2z + ze^z - z}{2(e^z - 1)} = \frac{z(e^z + 1)}{2(e^z - 1)} \\ &= \frac{z e^{z/2} + e^{-z/2}}{2 e^{z/2} - e^{-z/2}} = \frac{z}{2} \coth \frac{z}{2}. \end{aligned}$$

Das ist eine gerade Funktion (nur gerade Potenzen in der Potenzreihe), also  $B_3 = B_5 = \dots = 0$ .  
Setze  $z \mapsto 2z$ :

$$z \coth z = \frac{2z}{e^{2z} - 1} + z = \sum_{n \neq 0} B_{2n} \frac{4^n z^{2n}}{(2n)!}.$$

Es gilt

$$\cot z = i \coth(iz).$$

Setze  $z \mapsto iz$ :

$$iz \coth(iz) = z \cot z = \sum_{n \geq 0} B_{2n} \frac{4^n (-1)^n z^{2n}}{(2n)!}.$$

Wir kennen damit also die Laurent-Reihen-Entwicklung von  $\cot z$ . Es gilt (Übung)

$$\tan z = \cot z - 2 \cot(2z).$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} z \tan z &= \sum_{n \geq 0} B_{2n} \frac{4^n (-1)^n}{(2n)!} (1 - 4^n) z^{2n} \\ &= \sum_{n \geq 1} B_{2n} \frac{(-1)^{n-1} 4^n (4^n - 1) z^{2n}}{(2n)!}. \end{aligned}$$

Division durch  $z$  ergibt die Potenzreihenentwicklung von  $\tan z$ .

Weiters gilt (Übung)

$$\frac{z}{\sin z} = z \cot z + z \tan \frac{z}{2}.$$

Damit erhalten wir eine Entwicklung für  $\frac{z}{\sin z}$ .

## 10.2 Bernoulli-Polynome

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k x^{n-k}, \quad B_n(0) = B_n, \quad B_n(1) = B_n \quad n \neq 1.$$

Bivariate erzeugende Funktion:

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} B_n(x) \frac{z^n}{n!} &= \sum_{n \geq 0} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} B_k x^{n-k} \frac{z^n}{n!} \\ &= \sum_{k \geq 0} \sum_{n-k \geq 0} \frac{B_k z^k}{k!} \frac{x^{n-k} z^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= \frac{z e^{xz}}{e^z - 1}. \end{aligned}$$

*Beispiel* (Summen): Wir suchen Formeln für Summen der Form

$$0^m + 1^m + \dots + (n-1)^m = S_m.$$

Bekanntlich ist

$$S_1 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Sei  $f(z)$  die erzeugende Funktion,

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{m \geq 0} S_m \frac{z^m}{m!} = \sum_{m \geq 0} \sum_{0 \leq k < n} k^m \frac{z^m}{m!} \\ &= \sum_{0 \leq k < n} e^{kz} = \frac{e^{nz} - 1}{e^z - 1}. \end{aligned}$$

Wir wollen also den Koeffizienten von  $z^m$  in diesem Ausdruck berechnen,

$$\begin{aligned} S_m &= m! [z^m] \frac{e^{nz} - 1}{e^z - 1} = m! [z^{m+1}] z \frac{e^{nz} - 1}{e^z - 1} \\ &= m! [z^{m+1}] \frac{z e^{nz}}{e^z - 1} - m! [z^{m+1}] \frac{z}{e^z - 1} = m! \frac{B_{m+1}(n)}{(m+1)!} - m! \frac{B_{m+1}}{(m+1)!} \\ &= \frac{1}{m+1} (B_{m+1}(n) - B_{m+1}). \end{aligned}$$

Wir hatten zuletzt bewiesen

$$z \cot z = \sum B_{2n} \frac{(-1)^n 4^n z^{2n}}{(2n)!}.$$

Aus der komplexen Analysis: Mittag-Leffler, Partialbruchzerlegung des Cotangens:

$$\begin{aligned} z \cot z &= 1 - 2 \sum_{k \geq 1} \frac{z^2}{k^2 \pi^2 - z^2} = 1 - 2 \sum_{k \geq 1} \frac{\frac{z^2}{k^2 \pi^2}}{1 - \frac{z^2}{k^2 \pi^2}} \\ &= 1 - 2 \sum_{k \geq 1} \sum_{j \geq 1} \left( \frac{z^2}{k^2 \pi^2} \right)^j = 1 - 2 \sum_{j \geq 1} \frac{z^{2j}}{\pi^{2j}} \underbrace{\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^{2j}}}_{\zeta(2j)}. \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich bezüglich  $z^{2n}$  (für  $n \geq 1$ ):

$$-2 \frac{1}{\pi^{2n}} \zeta(2n) = B_{2n} \frac{(-1)^n 4^n}{(2n)!}$$

Daraus erhalten wir

$$\zeta(2n) = \frac{\pi^{2n} B_{2n} (-1)^{n-1} 2^{2n-1}}{(2n)!}.$$

*Beispiel:*  $n = 1, 2$ :

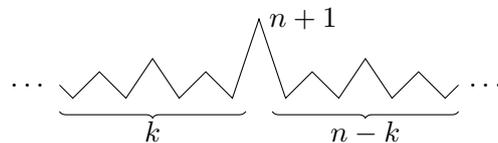
$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \quad \dots$$

### 10.3 Alternierende Permutationen

**Definition 10.1:** Eine Permutation  $\pi_1 \pi_2 \dots \pi_n$  mit  $\pi_1 < \pi_2 > \pi_3 < \pi_4 > \dots$  heißt *Up-Down-Permutation*, eine mit  $\pi_1 > \pi_2 < \pi_3 > \dots$  *Down-Up-Permutation*. Beides sind *alternierende Permutationen*.

Wir wollen diese Permutationen zählen, sei also  $A_n$  die Anzahl der Up-Down-Permutationen von  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Dann ist  $2A_n$  die Anzahl der alternierenden Permutationen (für  $n \geq 2$ ).

Rekursion: für  $n + 1$  Elemente sieht die Permutation so aus:



Das ergibt eine Rekursionsformel für  $n \geq 1$ ,

$$2A_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A_k A_{n-k}$$

mit Anfangswerten

$$A_0 = 1, \quad A_1 = 1.$$

Definiere die erzeugende Funktion

$$A(z) = \sum_{n \geq 0} A_n \frac{z^n}{n!}.$$

$A(z)$  erfüllt die Eigenschaft

$$\begin{aligned} A^2(z) - 1 &= \sum_{n \geq 1} 2A_{n+1} \frac{z^n}{n!} \\ &= 2A'(z) - 2 \\ 2A'(z) &= A^2(z) + 1, \end{aligned}$$

wobei  $A(0) = 1$ .

$$A(z) = \sec(z) + \tan(z) = \frac{1 + \sin z}{\cos z},$$

wobei  $\tan z$  eine ungerade,  $\sec z$  eine gerade Funktion ist. Die Anzahl der Up-Down-Permutationen von  $2n + 1$  Elementen ist

$$A_{2n+1} = (2n + 1)! [z^{2n+1}] A(z) = (2n + 1)! [z^{2n+1}] \tan z.$$

Wir haben also eine kombinatorische Interpretation der Koeffizienten von  $\tan z$  gefunden.

# Kapitel 11

## Hypergeometrische Funktionen

### 11.1 Definition und Beispiele

Hypergeometrische Funktionen sind Funktionen der Form

$$F \left( \begin{matrix} a_1, \dots, a_m \\ b_1, \dots, b_n \end{matrix} \middle| z \right) = \sum_{k \geq 0} \frac{a_1^{\bar{k}} \cdots a_m^{\bar{k}}}{b_1^{\bar{k}} \cdots b_n^{\bar{k}}} \cdot \frac{z^k}{k!}.$$

Man schreibt auch oft

$${}_mF_n \left( \begin{matrix} a_1, \dots, a_m \\ b_1, \dots, b_n \end{matrix} \middle| z \right)$$

oder

$${}_mF_n(a_1, \dots, a_m; b_1, \dots, b_n; z).$$

*Beispiel:*

$$F \left( \begin{matrix} \\ 1 \end{matrix} \middle| z \right) = \sum_{k \geq 0} \frac{z^k}{k!} = e^z$$

Um den hässlichen Leerraum zu vermeiden, schreibe stattdessen

$$F \left( \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \middle| z \right) = F \left( \begin{matrix} \\ 1 \end{matrix} \middle| z \right).$$

Weiteres Beispiel:

$$F \left( \begin{matrix} 1, 1 \\ 1 \end{matrix} \middle| z \right) = \sum_{k \geq 0} \frac{k!k!}{k!k!} \frac{z^k}{k!} = \sum_{k \geq 0} z^k = \frac{1}{1-z}.$$

Sei

$$F = \sum_{k \geq 0} t_k.$$

Wir betrachten den Term  $\frac{t_{k+1}}{t_k}$ :

$$\frac{(a_1 + k) \cdots (a_m + k)}{(b_1 + k) \cdots (b_n + k)} \frac{z}{k+1}.$$

Das ist eine rationale Funktion in  $k$ , wobei  $t_0 = 1$ .

*Beispiel:* Angenommen, wir erhalten

$$\frac{t_{k+1}}{t_k} = \frac{k^2 + 7k + 10}{4k^2 + 1}.$$

Das ist offensichtlich eine rationale Funktion in  $k$ . Faktorisierung:

$$\frac{t_{k+1}}{t_k} = \frac{(k+2)(k+5)}{4(k+\frac{i}{2})(k-\frac{i}{2})} \frac{(k+1)}{(k+1)}.$$

Das ist die Reihe

$$\sum t_k = t_0 \cdot F\left(\begin{matrix} 2, 5, 1 \\ \frac{i}{2}, -\frac{i}{2} \end{matrix} \middle| \frac{1}{4}\right).$$

*Beispiel* (Vandermonde-Konvolution): Für eine nichtnegative Ganzzahl  $n$  ist

$$\sum_k t_k = \sum_k \binom{r}{k} \binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}.$$

Wir wollen das in hypergeometrischer Notation niederschreiben.

$$\begin{aligned} \frac{t_{k+1}}{t_k} &= \frac{\binom{r}{k+1} \binom{s}{n-k-1}}{\binom{r}{k} \binom{s}{n-k}} = \frac{k!(r-k)!(n-k)!(s-n+k)!}{(k+1)!(r-k-1)!(n-k-1)!(s-n+k+1)!} \\ &= \frac{(r-k)(n-k)}{(k+1)(s-n+k+1)}. \end{aligned}$$

Mit  $t_0 = \binom{s}{n}$  haben wir also

$$\binom{s}{n} F\left(\begin{matrix} -r, -n \\ s+1-n \end{matrix} \middle| 1\right) = \binom{r+s}{n}.$$

Setze nun

$$a = -r, \quad b = -n, \quad c = s+1-n,$$

es ist also

$$r = -a, \quad n = -b, \quad s = c-1+n = c-1-b.$$

Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} F\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| 1\right) &= \frac{\binom{r+s}{n}}{\binom{s}{n}} = \frac{(r+s)!(s-n)!}{(r+s-n)!s!} = \frac{(-a+c-1-b)!(c-1)!}{(-a+c-1-b+b)!(c-1-b)!} \\ &= \frac{\Gamma(c-a-b)\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}, \end{aligned}$$

wobei  $b$  eine negative Ganzzahl sein muss. Die Formel

$$F\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| 1\right) = \frac{\Gamma(c-a-b)\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}$$

stammt von Gauß und gilt, sofern die Reihe konvergiert.

## 11.2 Die hypergeometrische Differentialgleichung

Die Ableitung einer hypergeometrischen Funktion ist

$$\frac{d}{dz} F \left( \begin{matrix} a_1, \dots, a_m \\ b_1, \dots, b_n \end{matrix} \middle| z \right) = \sum_{k \geq 1} \frac{a_1^{\bar{k}} \dots z^{k-1}}{b_1^{\bar{k}} \dots (k-1)!} = \frac{a_1 \dots a_m}{b_1 \dots b_n} F \left( \begin{matrix} a_1 + 1, \dots, a_m + 1 \\ b_1 + 1, \dots, b_n + 1 \end{matrix} \middle| z \right).$$

Der Operator

$$\vartheta = z \frac{d}{dz}$$

angewendet auf  $F$  ergibt

$$\vartheta F = \sum \frac{k a_1^{\bar{k}} \dots z^k}{b_1^{\bar{k}} \dots k!},$$

und

$$(\vartheta + a_1)F = \sum \frac{(k + a_1) a_1^{\bar{k}} \dots z^k}{b_1^{\bar{k}} \dots k!} = a_1 F \left( \begin{matrix} a_1 + 1, a_2, \dots \\ b_1, b_2, \dots \end{matrix} \middle| z \right).$$

Iteration ergibt

$$(\vartheta + a_1)(\vartheta + a_2) \dots (\vartheta + a_m)F = a_1 a_2 \dots a_m F \left( \begin{matrix} a_1 + 1, \dots, a_m + 1 \\ b_1, \dots, b_n \end{matrix} \middle| z \right).$$

Analoges kann man für die unteren Parameter durchführen,

$$(\vartheta + b_1 - 1)F = (b_1 - 1)F \left( \begin{matrix} a_1, \dots \\ b_1 - 1, b_2, \dots \end{matrix} \middle| z \right)$$

und nach Iteration

$$(\vartheta + b_1 - 1) \dots (\vartheta + b_n - 1)F = (b_1 - 1) \dots (b_n - 1)F \left( \begin{matrix} a_1, \dots, a_m \\ b_1 - 1, \dots, b_n - 1 \end{matrix} \middle| z \right).$$

Wir beobachten, dass

$$D(\vartheta + b_1 - 1) \dots (\vartheta + b_n - 1)F = (\vartheta + a_1) \dots (\vartheta + a_n)F.$$

Betrachte jetzt den Spezialfall

$$F \left( \begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| z \right).$$

Es gilt

$$D(\vartheta + c - 1)F = (\vartheta + a)(\vartheta + b)F.$$

$$\begin{aligned} D(zF' + (c-1)F) &= F' + zF'' + (c-1)F = (\vartheta + a)(zF' + bF) \\ &= z(F' + zF'' + bF') + a(zF' + bF). \end{aligned}$$

Zusammenfassen ergibt

$$z(1-z)F'' + (c-z(a+b+1))F' - abF = 0.$$

Das ist die typische *hypergeometrische Differentialgleichung*.

*Beispiel:* Wir suchen die hypergeometrische Darstellung von

$$\log(1+z).$$

$$\log(1+z) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1} z^n}{n} = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n z^{n+1}}{n+1} = \sum_{n \geq 0} t_n.$$

Quotient der Terme:

$$\frac{t_{n+1}}{t_n} = \frac{-z(n+1)}{n+2} \frac{n+1}{n+1}.$$

Die Darstellung ist also

$${}_zF\left(\begin{matrix} 1, 1 \\ 2 \end{matrix} \mid -z\right) = \log(1+z).$$