# Tutorium Mathematik II, M

30. Juni 2017

***Aufgabe 1.** Ermitteln Sie alle lokalen Maxima und Minima der Funktion *(10 Punkte)*

$$f(x, y) = y^2(1 - x^2 - y^2)$$

auf dem Gebiet

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0 \land x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Die mit * markierten Aufgaben werden vom Vortragenden präsentiert, die restlichen Aufgaben sind von den Studierenden zu bearbeiten.

**Aufgabe 2.** Berechnen Sie für die Kurve

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} (\cos(t))^2 \\ (\sin(t))^2 \\ \sqrt{2}\sin(t)\cos(t) \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

(a) die zurückgelegte Bogenlänge im Zeitintervall $[0, T]$, *(5 Punkte)*

(b) die Krümmung $\kappa(t)$. *(5 Punkte)*

**Aufgabe 3.** Bestimmen Sie sämtliche Lösungen der Differentialgleichung *(10 Punkte)*

$$y' + \left(4x + \frac{6}{x}\right) y - (x^2 + 1)y^2 = \frac{6}{x^2} + 4, \qquad x > 0$$

und geben Sie für jede Lösung den Definitionsbereich an.

**Aufgabe 4.** Mit $B_2$ bezeichnen wir die Kugel im $\mathbb{R}^3$ mit Radius 2 und Mittelpunkt im Ursprung. Wir betrachten den Körper

$$K = B_2 \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z \geq 0\},$$

dieser habe die konstante Dichte $\rho(x, y, z) = 1$. Berechnen Sie

(a) den Schwerpunkt $(x_S, y_S, z_S)$ von $K$, *(6 Punkte)*

*(Hinweis: Es gilt $x_S = y_S = z_S$. Eine Kugel vom Radius $R$ hat das Volumen $\frac{4}{3}\pi R^3$.)*

(b) das Trägheitsmoment von $K$ bezüglich der $z$-Achse. *(4 Punkte)*

**Lösung von Aufgabe 2**
Die zurückgelegte Bogenlänge ist $\sqrt{2}T$, die Krümmung $\kappa(t) = \sqrt{2}$ (ist in diesem Fall sogar von $t$ unabhängig).

**Lösung von Aufgabe 3**
Die allgemeine Lösungen haben die Form

$$y = \frac{2}{x} + \frac{1}{-x^3 + Cx^2 + x}, \quad C \in \mathbb{R} \quad \text{für } x \neq 0, \frac{C \pm \sqrt{C^2+4}}{2}$$

beziehungsweise

$$y = \frac{2}{x} \qquad \text{für } x \neq 0.$$

**Lösung von Aufgabe 4**
Der Schwerpunkt liegt bei $\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right)$. Der Trägheitsmoment bezüglich der $z$-Achse ist $\frac{32\pi}{15}$.