Mathematik II SS 2017
3. Übungsblatt
30.3.2017

Aufgabe 3.1. Wenden Sie auf die Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

das Orthonormalisierungsverfahren von Gram-Schmidt an; und zwar einmal in der Reihenfolge $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$, einmal in der Reihenfolge $\vec{v}_3, \vec{v}_1, \vec{v}_2$ und einmal in der Reihenfolge $\vec{v}_3, \vec{v}_2, \vec{v}_1$.

Aufgabe 3.2. Gegeben sind die Vektoren

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

$B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \vec{b}_4)$ ist eine Basis des $\mathbb{R}^4$ (dies dürfen Sie ohne weitere Rechnung annehmen). Bestimmen Sie die Koordinaten von $\vec{x}$ bezüglich der Basis B.

Aufgabe 3.3. Gegeben sind die Basen $B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ und $C = (\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3)$ des $\mathbb{R}^3$ mit

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{c}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{c}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{c}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass B und C tatsächlich Basen vom $\mathbb{R}^3$ sind.

(b) Berechnen Sie die Transformationsmatrix T von der Basis C auf die Basis B.

Aufgabe 3.4. Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 6 & -3 & 1 \\ -8 & 8 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3.5. Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 2 \\ 14 & -4 & 7 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3.6. Welcher Kegelschnitt wird durch die Gleichung

$$x_1^2 + 6x_2^2 - 12x_1x_2 - 4x_1 - 6x_2 = 42$$

definiert? Für die Lösung sollten Sie angeben: Typ (Ellipse, Hyperbel etc.) des Kegelschnitts, seine Lage und Ausrichtung (Verschiebungsvektor und Drehwinkel) sowie gegebenenfalls seine Halbachsen, Scheitelpunkte, Steigung etc.