Tutorium Mathematik I, M

25. November 2016

***Aufgabe 1.** Prüfen Sie, ob die folgenden Reihen konvergieren oder divergieren.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2 + n}{2n^2 - 1}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n) + 1}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n - 4}{2n^2 - n + 5}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \cdot (n-1)!}{(3 + 2(-1)^n) \cdot (2n-1)!}$

Aufgabe 2. Prüfen Sie, ob die folgenden Reihen konvergieren oder divergieren.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2 - 5) \cdot (n!)^2}{(n+2) \cdot (2n)!}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{4n+8} - \sqrt{4n-1}\right)$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + (-1)^n}{n^2 - 2n + 15}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2 - 2n + 15}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{3n}}{n^3 - 2n + 5}$ (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{17^n \cdot ((n-1)!)^4}{(2n-1)! \cdot (2n-2)!}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n \cos(\frac{\pi n}{4})}{2n+5}\right)^{n+1}$ (h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + 42n}{5^n + 3^n + n^2}$

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{7^n (2n-1)!}$ (j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5n^2 - 1)^n}{(3n+2)^{2n+1}}$

Die mit * markierten Aufgaben werden vom Vortragenden präsentiert, die restlichen Aufgaben sind von den Studierenden zu bearbeiten.

Lösung von Aufgabe 2

Die unten jeweils genannten Kriterien sind nicht immer die einzigen Kriterien, die funktionieren. Es sollten aber stets die *einfachsten* für den jeweiligen Fall sein. Zu einer ordentlichen Argumentation sind selbstverständlich noch die Rechnungen hinzuzufügen (insbesondere beim Leibnizkriterium die Überprüfung, ob die Beträge eine monoton fallende Nullfolge sind).

(a) Die Reihe konvergiert laut Quotientenkriterium.

(b) Die Reihe divergiert. Hierzu muss man die Wurzeln zu einem einzigen Summanden zusammenfassen und danach das Minorantenkriterium verwenden.

(c) Die Reihe divergiert laut Minorantenkriterium.

(d) Die Reihe konvergiert laut Leibnizkriterium.

(e) Die Reihe konvergiert laut Majorantenkriterium.

(f) Die Reihe divergiert laut Quotientenkriterium.

(g) Die Reihe divergiert laut Wurzelkriterium.

(h) Die Reihe konvergiert. Hierfür kann man zum Beispiel die Reihe aufspalten (eine Reihe mit Zähler 4^n und eine mit Zähler $42n$) und beide Reihen nach oben abschätzen, indem man den Nenner durch 5^n nach unten abschätzt. Beide neuen Reihen konvergieren laut Quotienten- oder Wurzelkriterium, also konvergiert die ursprüngliche Reihe laut Majorantenkriterium und der Regel, dass jede Summe von konvergenten Reihen konvergiert.

(i) Die Reihe divergiert laut Quotientenkriterium.

(j) Die Reihe konvergiert laut Wurzelkriterium.