

Formelsammlung, Klausur 1

Mathematik I, M, Übungen

Komplexe Zahlen

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i$$

$$z = a + bi \Rightarrow \begin{cases} \bar{z} = a - bi \\ |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}} \end{cases}$$

Polarkoordinaten:

$$z = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) = re^{i\varphi}$$

$$\bar{z} = r(\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi))$$

$$= r(\cos(\varphi) - i \sin(\varphi)) = re^{-i\varphi}$$

$$r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) \cdot s(\cos(\theta) + i \sin(\theta)) \\ = rs(\cos(\varphi + \theta) + i \sin(\varphi + \theta))$$

Wurzeln: Die n -ten Wurzeln von $r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$ sind

$$z_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \left(\frac{\varphi}{n} + k \frac{2\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\varphi}{n} + k \frac{2\pi}{n} \right) \right)$$

für $k = 0, 1, \dots, n - 1$.

Vektorrechnung

$$|\vec{x}| = \begin{cases} \sqrt{x_1^2 + x_2^2} & \text{zweidimensional} \\ \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} & \text{dreidimensional} \end{cases}$$

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \begin{cases} x_1y_1 + x_2y_2 & \text{zweidimensional} \\ x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 & \text{dreidimensional} \end{cases}$$

Winkel zwischen \vec{x}, \vec{y} : $\cos(\varphi) = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{|\vec{x}| \cdot |\vec{y}|}$

Kreuzprodukt: $\vec{x} \times \vec{y} = \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}$

Geradengleichungen im \mathbb{R}^2 :

$$\vec{x} = P + t \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} \quad \text{Parameterform}$$

$$\langle \vec{n}, \vec{x} \rangle = \langle \vec{n}, P \rangle \quad \text{mit } \vec{n} = \begin{pmatrix} r_2 \\ -r_1 \end{pmatrix} \quad \text{Normalform}$$

Ebenengleichungen im \mathbb{R}^3 :

$$\vec{x} = P + s\vec{q} + t\vec{r} \quad \text{Parameterform}$$

$$\langle \vec{n}, \vec{x} \rangle = \langle \vec{n}, P \rangle \quad \text{mit } \vec{n} = \vec{q} \times \vec{r} \quad \text{Normalform}$$

Abstand Q zu $\langle \vec{n}, \vec{x} \rangle = \langle \vec{n}, P \rangle$ (Gerade in \mathbb{R}^2 /Ebene in \mathbb{R}^3):

$$\frac{|\langle \vec{n}, Q \rangle - \langle \vec{n}, P \rangle|}{|\vec{n}|}$$

Fläche des von \vec{x} und \vec{y} aufgespannten Parallelogramms:

$$|\vec{x} \times \vec{y}|$$

Volumen des von $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ aufgespannten Parallelepipeds:

$$|\langle \vec{x}, \vec{y} \times \vec{z} \rangle|$$

Folgen

Geometrische Folge:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{für } |q| < 1 \\ 1 & \text{für } q = 1 \\ \text{divergent} & \text{sonst} \end{cases}$$

Harmonische Folge:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Majorantenkriterium: Konvergiert $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen a und gilt $|b_n - a| \leq |a_n - a|$ für alle n ab einem Index N , dann konvergiert auch $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen a .

Einschlusskriterium: Konvergieren sowohl $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ als auch $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen a und gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$ ab einem Index N

$$a_n \leq b_n \leq c_n,$$

dann konvergiert auch $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen a .

Häufungspunkt: Ein Punkt a ist ein Häufungspunkt der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ falls es für alle $\epsilon > 0$ unendlich viele Folgenglieder mit $|a_n - a| < \epsilon$ gibt.

Limes Superior und Limes Inferior: Der Limes Superior $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ (bzw. Limes Inferior $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$) der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist der größte (bzw. kleinste) Häufungspunkt.

Lineare Rekursionen: Hat das Polynom

$$x^t - c_1x^{t-1} - c_2x^{t-2} - \dots - c_{t-1}x - c_t$$

lauter verschiedene Nullstellen β_1, \dots, β_t , dann hat die Lösung der linearen Rekursion

$$a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \dots + c_t a_{n-t} \quad \text{für } n > t$$

die Form

$$a_n = \alpha_1\beta_1^n + \alpha_2\beta_2^n + \dots + \alpha_t\beta_t^n,$$

wobei die Konstanten $\alpha_1, \dots, \alpha_t$ durch die Anfangswerte a_1, \dots, a_t bestimmt werden.

Reihen

| konvergent | divergent |
|---|--|
| $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ für $ q < 1$ | $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ für $ q \geq 1$ |
| $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ |

Notwendige Bedingung: Eine Reihe kann nur konvergieren, wenn die Folge ihrer Summanden eine Nullfolge ist.

Majorantenkriterium: Ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent und gilt $|a_n| \leq b_n$ für alle n ab einem Index N , dann konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Minorantenkriterium: Ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergent und gilt $0 \leq b_n \leq a_n$ für alle n ab einem Index N , dann divergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Wurzelkriterium: Ist $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$ für ein $q < 1$ und alle n ab einem Index N , dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Insbesondere konvergiert sie, falls $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$. Ist $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ für unendlich viele n , so divergiert sie.

Quotientenkriterium: Ist $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q$ für ein $q < 1$ und alle n ab einem Index N , dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Insbesondere konvergiert sie, falls $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$. Ist $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq 1$ für alle n ab einem Index N , dann divergiert die Reihe.

Leibniz-Kriterium: Ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monotone Nullfolge, dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$.