Formelsammlung, Klausur 2

Mathematik I, M, Übungen, WS 2016/17

Funktionen

$$e^{x+y} = e^x e^y, \quad e^0 = 1, \quad e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y), \quad \ln(1) = 0, \quad \ln(x^a) = a\ln(x)$$

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos(x), \quad \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$$

$$\sin(-x) = -\sin(x), \quad \cos(-x) = \cos(x)$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \quad \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}, \qquad \coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}$$

Ableitungsregeln

$$(fg)' = f'g + fg' \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$\big(f(g(x))\big)' = f'(g(x))g'(x) \quad \big(f^{-1}\big)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Eigenschaften differenzierbarer Funktionen

Notwendige Bedingung für Extrema: An Extremstellen im Inneren des Definitionsbereichs ist die Ableitung 0.
Hinreichende Bedingung für Extrema: Gilt $f'(x) = 0$ und $f''(x) < 0$, dann ist x eine Maximalstelle von f. Ist $f'(x) = 0$ und $f''(x) > 0$, liegt eine Minimalstelle vor.
Monotonie: Sei f auf $[a,b]$ stetig. Gilt $f'(x) \geq 0$ auf (a,b), dann ist f auf $[a,b]$ monoton steigend. Gilt stattdessen $f'(x) \leq 0$, dann ist f monoton fallend. Gilt sogar $f'(x) > 0$ oder $f'(x) < 0$, dann ist f streng monoton steigend/fallend.
Krümmung: Eine differenzierbare Funktion ist (streng) konvex, falls ihre Ableitung (streng) monoton steigt. Sie ist (streng) konkav, falls die Ableitung (streng) monoton fällt. Ein *Wendepunkt* ist ein Punkt, an dem die Krümmung von konvex zu konkav (oder umgekehrt) wechselt.
Senkrechte Asymptoten: Konvergiert $f(x)$ für $x \to x_0^-$ und für $x \to x_0^+$ gegen ∞ oder $-\infty$, dann hat f bei x_0 eine senkrechte Asymptote.
Schiefe Asymptoten: Konvergiert für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$ der Bruch $f(x)/x$ gegen $a \in \mathbb{R}$ und außerdem $f(x) - ax$ gegen $b \in \mathbb{R}$, dann ist $ax + b$ eine Asymptote von f.

Regel von l'Hospital

Konvergieren f und g für $x \to a$ beide gegen 0 oder beide gegen ∞, dann gilt $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Taylorpolynome und Potenzreihen

Taylorpolynom vom Grad n um x_0:

$$P_n(x,x_0) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

Konvergenzradius: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ konvergiert für alle x mit $|x-x_0| < R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$. Für $|x-x_0| = R$ muss man die Konvergenz separat überprüfen.

Integrationsregeln

Partielle Integration:

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

Substitution: Setzen wir $x = g(u)$, dann ist

$$\int f(x)dx = \int f\big(g(u)\big)g'(u)du.$$

Substitution $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ bei trigonometrischen Funktionen:

$$dx = \frac{2}{1+u^2}du \quad \sin(x) = \frac{2u}{1+u^2} \quad \cos(x) = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

Partialbruchzerlegung: Ein Partialbruch ist von der Form $\frac{c}{(x-\lambda)^i}$ mit $i \in \mathbb{N}$ oder der Form $\frac{ax+b}{x^2+\alpha x+\beta}$, wobei $x^2 + \alpha x + \beta$ keine reellen Nullstellen hat.
Ist $\frac{P(x)}{Q(x)}$ eine rationale Funktion mit $\mathrm{grad}(P) < \mathrm{grad}(Q)$, dann besteht eine *Partialbruchzerlegung* darin, $\frac{P(x)}{Q(x)}$ als Summe von Partialbrüchen zu schreiben.

Wichtige Ableitungen und Integrale

$f(x)$ / $\int g(x)dx$	$f'(x)$ / $g(x)$	$f(x)$ / $\int g(x)dx$	$f'(x)$ / $g(x)$
$\tan(x)$	$1+\tan(x)^2 = \frac{1}{\cos(x)^2}$	$\cot(x)$	$-1-\cot(x)^2 = \frac{-1}{\sin(x)^2}$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{x^2+1}$	$\mathrm{arccot}(x)$	$\frac{-1}{x^2+1}$
$\tanh(x)$	$1-\tanh(x)^2 = \frac{1}{\cosh(x)^2}$	$\coth(x)$	$1-\coth(x)^2 = \frac{-1}{\sinh(x)^2}$
$\mathrm{arsinh}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\mathrm{arcosh}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\mathrm{artanh}(x)$	$\frac{1}{1-x^2}$ $(\lvert x\rvert < 1)$	$\mathrm{arcoth}(x)$	$\frac{1}{1-x^2}$ $(\lvert x\rvert > 1)$

Bestimmte Integrale

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \text{ für } a < c < b$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Ist F eine Stammfunktion von f und beide Funktionen auf dem Intervall $[a,b]$ definiert, dann ist

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Ist f in a oder b nicht definiert, dann ist

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{y\to a^+}\int_y^b f(x)dx \qquad \text{beziehungsweise}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{y\to b^-}\int_a^y f(x)dx.$$

Hat f eine Polstelle im Punkt $c \in (a,b)$, dann ist

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{y\to c^-}\int_a^y f(x)dx + \lim_{y\to c^+}\int_y^b f(x)dx.$$

$$\int_a^b f\big(g(x)\big)g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$