Mathematik I WS 2016/17
3. Übungsblatt
15.11.2016

Aufgabe 3.1. Es seien $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ Vektoren im $\mathbb{R}^3$. Zeigen Sie

(a) $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$,

(b) $\left\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \right\rangle = \left\langle \vec{a}, \vec{b} \times \vec{c} \right\rangle$.

Aufgabe 3.2. Betrachten Sie die Geraden

$$g \colon \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h \colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Schneiden sich g und h? Falls ja, geben Sie Schnittpunkt und Winkel an. Falls sie sich nicht schneiden, geben Sie ihren minimalen Abstand an, sowie die Punkte auf den Geraden, welche diesen Abstand zueinander haben.

Aufgabe 3.3. Gegeben seien der Punkt $P = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, die Gerade

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

und die Ebene

$$\epsilon \colon \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 12 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie den Abstand von P zu g und von P zu ϵ, und den Punkt auf g bzw. ϵ, der P am nächsten ist.

Aufgabe 3.4. Die Ebene

$$\epsilon \colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist in Parameterform gegeben. Bestimmen Sie die Ebenengleichung in Normalform. Bestimmen Sie außerdem den Schnittpunkt von ϵ mit der Geraden

$$g \colon \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

sowie den Winkel, in welchem ϵ und g sich schneiden.

Aufgabe 3.5. Gegeben seien die Ebenen

$$\epsilon_1\colon x+y-z=0 \qquad \text{und} \qquad \epsilon_2\colon -x+5y-z=2.$$

(a) Bestimmen Sie die Schnittgerade und den Schnittwinkel der beiden Ebenen.

(b) Bestimmen Sie jeweils eine Parameterform von ϵ_1 bzw. ϵ_2.

Aufgabe 3.6. Von einer geraden Pyramide mit Volumen 36 sind die Eckpunkte

$$A=\begin{pmatrix}-3\\1\\-4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-2\\3\\-2\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}-1\\-1\\-3\end{pmatrix}$$

der quadratischen Grundfläche gegeben. Bestimmen Sie die Koordinaten der Spitze.
(Eine Pyramide mit quadratischer Grundfläche heißt gerade*, wenn alle vier Kanten von der Spitze zu den Ecken der Grundfläche gleich lang sind.)*
Zur Erinnerung: Das Volumen einer Pyramide ist ein Drittel vom Produkt von Höhe und Grundfläche.