

**Mathematik I WS 2016/17**  
**4. Übungsblatt**  
**22.11.2016**

**Aufgabe 4.1.** Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Konvergenz und geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an:

(a)  $a_n = \frac{3n^2 - n - 2}{4n - 3}$ ;

(b)  $a_n = \frac{5^{n+1} + 3^n}{3^{2n} + 5^{n-1}}$ ;

(c)  $a_n = \frac{2^{n+8} + (-6)^{n+1}}{6^{n+2} - 5^n}$ ;

(d)  $a_n = \sqrt{3n-2} - \sqrt{3n+7}$ .

**Aufgabe 4.2.** Zeigen Sie, dass:

(a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2^n} = 0$  (ohne Teil (b) zu verwenden);

(b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^a}{b^n} = 0$  für alle  $a \in \mathbb{R}$  und  $b > 1$ .

*Hinweis: Sie dürfen den Grenzwert*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

*ohne Beweis verwenden.*

**Aufgabe 4.3.** Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Konvergenz und geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an:

(a)  $a_n = \sqrt{9n-4} - \sqrt{4n+9}$ ;

(b)  $a_n = \frac{(n^8 - 3n)2^{2n} + n^2 5^{n-6}}{8^{n-5}}$ .

**Aufgabe 4.4.** Welche dieser Folgen sind monoton? Welche sind beschränkt?

(a)  $a_n = (-1)^{n+1} \frac{n}{2}$ ;

(b)  $a_n = \frac{n^2 + 2}{n + 1} - \frac{n^2 - 1}{n + 2}$ .

**Aufgabe 4.5.** Bestimmen Sie alle Häufungspunkte sowie gegebenenfalls den Limes Superior und Limes Inferior der Folgen:

(a)  $a_n = n + (-1)^n(n + 1)$ ;

(b)  $a_n = (-1)^{n-1} \left(1 - \frac{2}{n^2}\right)$ ;

(c)  $a_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} + (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$ .

**Aufgabe 4.6.** Die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist rekursiv durch

$$a_1 = -8, a_2 = 28, a_3 = -8 \quad \text{und} \quad a_n = 7a_{n-2} + 6a_{n-3} \quad \text{für } n \geq 4$$

definiert. Bestimmen Sie eine explizite Darstellung für  $a_n$ .