

8. Berechnen Sie die Bogenlänge der Kurve $\gamma : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ 1 + t^2 \\ \sin t \end{pmatrix}$ mit $0 \leq t \leq 3\pi/2$.

9. Berechnen Sie

$$\int_{\gamma} (2 + 2y)dx - (y - 2x)dy,$$

wobei γ die Ellipse $x^2 + 4y^2 = 9$ ist.

Hinweis: Verwenden Sie den Satz von Green-Riemann.

10. Überprüfen Sie den Satz von Green-Riemann für folgende Beispiele:

(a) $B := \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$, $P = 2x - y + 1$ und $Q = x^2y$.

(b) $B := \{(x, y) : 0 \leq y \leq x \leq 1\}$, $P = e^{x-y}$ und $Q = e^{x+y}$.

11. Berechnen Sie

$$\int_{\gamma} (2y + 5)dx - (7x + 1)dy,$$

wobei γ der Kreis $x^2 + y^2 = \frac{1}{9}$ ist.

Hinweis: Verwenden Sie den Satz von Green-Riemann.

12. Berechnen Sie

$$\int_{\gamma} -(y^4 + 1)dx + xydy,$$

wobei γ der Rand des Dreiecks mit den Eckpunkten $(0, 0)$, $(1, 1)$ und $(0, 1)$ ist.

Hinweis: Verwenden Sie den Satz von Green-Riemann.

13. Berechnen Sie

$$\int_{\partial B} 2xy^2dx + 3x^2ydy,$$

wobei $B := \{(x, y) : 0 \leq x, 0 \leq y \leq 1 - x^2\}$.

Hinweis: Verwenden Sie den Satz von Green-Riemann.

14. Bestimmen Sie, ob das gegebene Feld ein Gradientenfeld ist, und berechnen Sie gegebenenfalls das Potential:

a) $\begin{pmatrix} 6x^5y \\ x^6 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2y \cos x + 1 \\ 2 \sin x \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} y + xe^y \\ ye^x + x \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} y \sin 2x \\ \sin^2 x \end{pmatrix}$

15. Berechnen Sie mittels zugehörigem Potential

$$\int_{\gamma} (\ln y + 3)dx + \left(\frac{x}{y} - 1\right)dy,$$

wobei $\gamma : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 + \sin^2(t) \\ e^{2t} \cos(t) \end{pmatrix}$ und $0 \leq t \leq \pi/6$.