21. Die Funktion $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ sei holomorph und $v(x,y) = e^y x \sin(x) - e^y(y+1)\cos(x)$. Berechnen Sie $u(x,y)$ und bestimmen Sie damit $f(z)$.

22. Berechnen Sie alle Werte von (log ist der komplexe Logarithmus, d.h. $\log(1) = 2k\pi i$ für ein $k \in \mathbb{Z}$):

    a) $\log(-i^9)$, b) $\log(-1+\sqrt{3}i)$, c) $\log(1-2i)$.

23. Berechnen Sie alle Werte von:

    a) i^{2i}, b) $(1-i)^{\frac{i}{2}}$, c) $i^{(i^i)}$.

24. Berechnen Sie

    (a) $\cosh(-i)$ und $\cos(1-2i)$,

    (b) $\sinh(1+i)$ und $\sin(2i)$.

25. Beweisen Sie, dass $\frac{z-1}{z+1}$ die Menge $\mathbb{C}^+ := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\}$ konform auf $\mathbb{E} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ abbildet.

26. Zeigen Sie dass für jedes $z \in \mathbb{C}$:

    a) $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$, b) $\overline{\sin(z)} = \sin(\overline{z})$, c) $\overline{\cos(z)} = \cos(\overline{z})$.

27. Beweisen Sie die folgenden Identitäten indem Sie die entsprechenden Potenzreihen miteinander vergleichen.

    (a) $e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z)$;

    (b) $\frac{e^z - e^{-z}}{2} := \sinh(z) = -i\sin(iz)$;

    (c) $\frac{e^z + e^{-z}}{2} := \cosh(z) = \cos(iz)$.