

35. Bestimmen Sie die Residuen folgender Funktionen in ihren singulären Punkten:

$$\begin{array}{ll} a) f(z) = \frac{z+7}{z+2}, & b) f(z) = \frac{e^{2z+1}}{(z-a)^3}, a \in \mathbb{C}, \\ c) f(z) = z^5 \cosh \left(\frac{1}{z^3} \right), & d) f(z) = \frac{\sin z}{z^6}. \end{array}$$

36. Berechnen Sie

$$\int_C \frac{z^3 e^{\frac{1}{z^2}}}{z-1} dz,$$

wobei C durch die Gleichung

$$\begin{array}{ll} a) |z| = \frac{1}{3}, & b) |z| = \frac{3}{2} \end{array}$$

beschrieben ist.

37. (a) Entwickeln Sie die Funktion $f(z) = (z+z^3)(e^{\frac{1}{z^2}} + e^{\frac{1}{z-1}})$ in eine Laurentreihe, zuerst um den Punkt $z_0 = 0$, dann um den Punkt $z_0 = 1$.
 (b) Berechnen Sie $\text{Res}[f; 0]$ und $\text{Res}[f, 1]$.
 (c) Berechnen Sie folgendes Integral mit Hilfe des Residuensatzes

$$\int_{|z|=2} (z+z^3)(e^{\frac{1}{z^2}} + e^{\frac{1}{z-1}}) dz.$$

38. Berechnen Sie folgende Integrale mit Hilfe des Residuensatzes:

$$\begin{array}{ll} a) \int_{|z|=1} \frac{5z^2 - 4z + 1}{(z+2)(4z^2+1)} dz, & b) \int_{|z|=1} \frac{\cos(z)}{z^2 + 4iz} dz, \\ c) \int_{|z|=2} \frac{z^6 - 3z^4 + 1}{(2z-1)(z^2+9)} dz, & d) \int_{|z|=\pi} \frac{z+1}{z^2+9} dz. \end{array}$$

39. Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung von

$$f(z) = \frac{z^2 + z + 1}{z^4 + 1}$$

und berechnen Sie damit *ohne* Residuensatz $\int_{\gamma} f(z) dz$, wobei γ der Kreis $|z-2| = 4$ ist.