

40. Berechnen Sie folgende Integrale mit Hilfe des Residuensatzes:

$$a) \int_0^{2\pi} \frac{\cos(2x)}{5 - 4 \cos(x)} dx; \quad b) \int_0^{2\pi} \frac{1}{(5 - 3 \sin x)^2} dx.$$

41. Berechnen Sie folgende Integrale mit Hilfe des Residuensatzes:

$$a) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z}{(z^2 - 2z + 2)^2} dz, \quad b) \int_0^{\infty} \frac{z^2}{(z^2 + 1)(z^2 + 4)} dz,$$
$$c) \int_0^{\infty} \frac{dz}{(1 + z^2)^3}, \quad d) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z}{1 + z^4} dz.$$

42. Berechnen Sie folgende Integrale

$$a) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2 + 1} dx; \quad b) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 1} dx.$$

Hinweis: Integrieren Sie entlang der Kurve $C_R = [-R, R] \cup H_R$, wobei H_R der Halbkreis (in der oberen oder unteren Halbebene) mit dem Mittelpunkt im Ursprung und dem Radius R ist.

43. Bestimmen Sie die Fourier-Transformierte der Funktion $f(x) = \exp(-x^2/2)$.

Hinweis: Berechnen Sie das Integral

$$\int_{\gamma_R} e^{-\frac{z^2}{2}} dz,$$

wobei γ_R das Rechteck mit den Eckpunkten $-R, R, R + it, -R + it$ bezeichnet. Lassen Sie $R \rightarrow \infty$ streben und benützen Sie, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}.$$