

44. Bestimmen Sie die LAPLACE-Transformation $\mathcal{L}\{f\}$ von

$$a) \sin^2(\omega t), \quad b) \cosh^2(2t), \quad c) te^{3t}.$$

Hinweis: Verwenden Sie $\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$.

45. Bestimmen Sie die Rücktransformation $f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s))$ von

$$a) \frac{5}{s^2 - 7s + 12}, \quad b) \frac{23}{(s+3)^5}, \quad c) \frac{7}{s^2 + s + 1}, \quad d) \frac{s+1-2\alpha}{s^2 + 2s + \alpha^2 + 1}.$$

46. Lösen Sie mit Hilfe der LAPLACE-Transformation folgende Anfangswertprobleme:

$$(a) y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = e^{-t}(\cos t + 3 \sin t), \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 1;$$

$$(b) y''(t) - 2y'(t) + 4y(t) = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1;$$

$$(c) y'''(t) - y'(t) = 3(2 - t^2), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 1;$$

$$(d) 9y''(t) - 6y'(t) + y(t) = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 1.$$

47. Lösen Sie folgende Anfangswertprobleme mit Hilfe der LAPLACE-Transformation und des Faltungssatzes:

$$a) y''(t) + y(t) = 5t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0;$$

$$b) y''(t) + y(t) = \frac{3}{2} \sin(2t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

48. Lösen Sie folgende Integralgleichungen mit Hilfe der der LAPLACE-Transformation und des Faltungssatzes:

$$(a) y(x) = xe^x - 2e^x \int_0^x e^{-t} y(t) dt,$$

$$(b) y(x) = x + e^x - \int_0^x y(t) \cosh(x-t) dt.$$

49. Bestimmen Sie mit Hilfe der LAPLACE-Transformation eine beschränkte Lösung des Problems

$$\text{Dgl.:} \quad u_{tt} = 9u_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0,$$

$$\text{RB:} \quad u(0, t) = -4 \sin 2t, \quad t > 0,$$

$$\text{AB:} \quad u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, \quad x > 0.$$