50. Berechnen Sie den Flächeninhalt der Fläche F

    (a) die durch folgende Parametrisierung gegeben ist:

    $$\vec{x}(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 3(1-\frac{r}{4}) \end{pmatrix}; \text{ mit } 2 \le r \le 4 \text{ und } 0 \le \varphi \le 2\pi,$$

    (b) die von $z = xy$ und $x^2 + y^2 \le 1$ begrenzt wird.

51. Man berechne das Oberflächenintegral

    $$\iint_F \begin{pmatrix} z \\ x+y \\ -x \end{pmatrix} d\vec{A},$$

    (a) wenn F die ebene Fläche $z + 3x + 2y = 3$, $x, y, z \ge 0$ ist;

    (b) wenn F die Oberfläche der Halbkugel $z^2 + x^2 + y^2 = 4$, $z \ge 0$ ist;

    (c) wenn F die Oberfläche des Paraboloids $z = x^2 + y^2$, $z \le 1$ ist.

52. Verifizieren Sie den Satz von Stokes im Falle des Vektorfeldes $\vec{K} = \begin{pmatrix} xy^2 \\ x^2y + z \\ 2xz \end{pmatrix}$ und der Oberfläche F, die gegeben wird durch $x^2 + 4y^2 = z$ und $z < 1$.

53. Verwenden Sie den Satz von Stokes um das Kurvenintegral $\int_C \vec{K} \mathrm{d}\vec{x}$ zu berechnen. Dabei sei

    $$\vec{K} = \begin{pmatrix} x + yz \\ \cos y + z^2 \\ -2x + e^z \end{pmatrix}$$

    und die Kurve C sei die Schnittmenge der Flächen $z = x$ und $2x^2 = 1 + z^2 - y^2$.

54. Berechnen Sie mit dem Satz von Gauss das Oberflächenintegral $\iint_S (\vec{K} \cdot \vec{n}) dA$. Dabei sei

    $$\vec{K} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

    und F die Oberfläche des Tetraeders der von den Ebenen $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = a$, $a > 0$ begrenzt wird.

55. Berechnen Sie mit dem Satz von Gauss das Oberflächenintegral $\iint_S (\vec{K} \cdot \vec{n}) dA$. Dabei sei

    $$\vec{K} = \begin{pmatrix} x^3 \\ y^3 \\ z^3 \end{pmatrix}$$

    und F die geschlossene Oberfläche $x^2 + y^2 = z^2$ mit $0 \le z \le h$.