1. Berechnen Sie

   (a) die Bogenlänge der Kurve $\gamma : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 7+t^2 \end{pmatrix}$ mit $1 \leq t \leq 3$,

   (b) den Gradient von $f(x,y,z) = \frac{4x}{y^2+5z}$.

2. Berechnen Sie das Kurvenintegral (die physikalische Arbeit)

$$\int_\gamma y^2 \mathrm{d}x - x^4 \mathrm{d}y \quad \text{mit} \quad \gamma : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ \frac{1}{t} \end{pmatrix}, \quad 1 \leq t \leq 2.$$

3. Berechnen Sie das Kurvenintegral (die physikalische Arbeit)

$$\int_\gamma (x^2 - y)\mathrm{d}x + \frac{\mathrm{d}y}{x+y} \quad \text{mit} \quad \gamma : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t^2+1 \\ t+1 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

4. Berechnen Sie das Kurvenintegral (die physikalische Arbeit)

$$\int_\gamma (ye^{xy} + x^2 y)\mathrm{d}x + (xe^{xy} - y)\mathrm{d}y \quad \text{mit} \quad \gamma : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

5. Berechnen Sie das Kurvenintegral (die physikalische Arbeit)

$$\int_\gamma \exp\left(y^{\frac{2}{3}}\right) \mathrm{d}x - \exp\left(x^{\frac{3}{2}}\right) \mathrm{d}y \quad \text{mit} \quad \gamma : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^{\frac{3}{2}} \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

6. Berechnen Sie das Kurvenintegral (die physikalische Arbeit) $\int_\gamma 2xy^3 \mathrm{d}x + 3x^2y^2 \mathrm{d}y$ wobei γ der Weg ist, der gegen den Uhrzeigersinn durch das Dreieck mit den Eckpunkten $(1,1)$, $(3,1)$ und $(3,3)$ läuft.

7. Berechnen Sie das Kurvenintegral (die physikalische Arbeit) $\int_\gamma \sin(y)\mathrm{d}x - \cos(x)\mathrm{d}y$ wobei γ der Weg ist, der gegen den Uhrzeigersinn durch das Quadrat mit den Eckpunkten $(0,1), (-1,0), (0,-1)$ und $(1,0)$ läuft.

8. Berechnen Sie die Bogenlänge der Kurve $\gamma : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ 1+t^2 \\ \sin t \end{pmatrix}$ mit $0 \leq t \leq 3\pi/2$.

9. Berechnen Sie
$$\int_\gamma (2+2y)dx - (y-2x)dy,$$
wobei γ die Ellipse $x^2 + 4y^2 = 9$ ist.
Hinweis: Verwenden Sie den Satz von Green-Riemann.

10. Überprüfen Sie den Satz von Green-Riemann für folgende Beispiele:
    (a) $B := \{(x,y) \,:\, x^2+y^2 \leq 1\}$, $P = 2x - y + 1$ und $Q = x^2 y$.
    (b) $B := \{(x,y) \,:\, 0 \leq y \leq x \leq 1\}$, $P = e^{x-y}$ und $Q = e^{x+y}$.

11. Berechnen Sie
$$\int_\gamma (2y+5)dx - (7x+1)dy,$$
wobei γ der Kreis $x^2+y^2 = \frac{1}{9}$ ist.
Hinweis: Verwenden Sie den Satz von Green-Riemann.

12. Berechnen Sie
$$\int_\gamma -(y^4+1)dx + xydy,$$
wobei γ der Rand des Dreiecks mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(1,1)$ und $(0,1)$ ist.
Hinweis: Verwenden Sie den Satz von Green-Riemann.

13. Berechnen Sie
$$\int_{\partial B} 2xy^2dx + 3x^2ydy,$$
wobei $B := \{(x,y) \,:\, 0 \leq x, 0 \leq y \leq 1 - x^2\}$.
Hinweis: Verwenden Sie den Satz von Green-Riemann.

14. Bestimmen Sie, ob das gegebene Feld ein Gradientenfeld ist, und berechnen Sie gegebenenfalls das Potential:
$$\text{a)} \begin{pmatrix} 6x^5y \\ x^6 \end{pmatrix} \quad \text{b)} \begin{pmatrix} 2y\cos x + 1 \\ 2\sin x \end{pmatrix} \quad \text{c)} \begin{pmatrix} y + xe^y \\ ye^x + x \end{pmatrix} \quad \text{d)} \begin{pmatrix} y \sin 2x \\ \sin^2 x \end{pmatrix}$$

15. Berechnen Sie mittels zugehörigem Potential
$$\int_\gamma (\ln y + 3)dx + (\frac{x}{y} - 1)dy,$$
wobei $\gamma : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1+\sin^2(t) \\ e^{2t}\cos(t) \end{pmatrix}$ und $0 \leq t \leq \pi/6$.

16. Zeigen Sie die Differenzierbarkeit
    (a) von $f(z) = \frac{1}{z+2}$ auf $\mathbb{C} \setminus \{-2\}$,
    (b) von $f(z) = \frac{1}{z-i}$ auf $\mathbb{C} \setminus \{i\}$.

17. Zeigen Sie (ohne Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen), dass $f(Z) = |z|^2 + 1$ nur in $z_0 = 0$ differenzierbar ist.

18. Zeigen Sie (ohne Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen), dass $f(z) = 2\overline{z} - 1$ nicht differenzierbar ist.

19. Entwicklen Sie die Funktion $f(z) = \frac{1}{z^2+3}$ in eine Potenzreihe um $z_0 = 0$ und berechnen Sie den Konvergenzradius.

20. Die Funktion $f(x+iy) = u(x,y)+iv(x,y)$ sei holomorph und $v(x,y) = \cosh(x)\cos(y)$. Berechnen Sie $u(x,y)$ und bestimmen Sie damit $f(z)$.

21. Die Funktion $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ sei holomorph und $v(x,y) = e^y x \sin(x) - e^y(y+1)\cos(x)$. Berechnen Sie $u(x,y)$ und bestimmen Sie damit $f(z)$.

22. Berechnen Sie alle Werte von (log ist der komplexe Logarithmus, d.h. $\log(1) = 2k\pi i$ für ein $k \in \mathbb{Z}$):

    a) $\log(-i^9)$, b) $\log(-1+\sqrt{3}i)$, c) $\log(1-2i)$.

23. Berechnen Sie alle Werte von:

    a) i^{2i}, b) $(1-i)^{\frac{i}{2}}$, c) $i^{(i^i)}$.

24. Berechnen Sie

    (a) $\cosh(-i)$ und $\cos(1-2i)$,

    (b) $\sinh(1+i)$ und $\sin(2i)$.

25. Beweisen Sie, dass $\frac{z-1}{z+1}$ die Menge $\mathbb{C}^+ := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\}$ konform auf $\mathbb{E} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ abbildet.

26. Zeigen Sie dass für jedes $z \in \mathbb{C}$:

    a) $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$, b) $\overline{\sin(z)} = \sin(\overline{z})$, c) $\overline{\cos(z)} = \cos(\overline{z})$.

27. Beweisen Sie die folgenden Identitäten indem Sie die entsprechenden Potenzreihen miteinander vergleichen.

    (a) $e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z)$;

    (b) $\frac{e^z - e^{-z}}{2} := \sinh(z) = -i\sin(iz)$;

    (c) $\frac{e^z + e^{-z}}{2} := \cosh(z) = \cos(iz)$.

28. Gegeben seien die komplexe Funktion $f(z) = z^2$ und C, die gerade Linie von $1 - i$ nach $2 + 3i$. Berechnen Sie $\int_C f(z)\,dz$, indem Sie die Real- und Imaginärteilfunktion von f verwenden ($f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$)

29. Berechnen Sie durch zwei verschiedene Methoden$\int_C \frac{2}{z^4}\,dz$, wenn C die Kurve mit der Parametrisierung $\alpha(t) = e^{-\pi it}$, $t \in [0, 1]$ ist.

30. Berechnen Sie das komplexe Kurvenintegral $\int_C f(z)\mathrm{d}z$, wobei

    (a) $f(z) = \frac{2}{z}$ und C der Kreisbogen (im Uhrzeigersinn) von $2i$ nach $-2i$ ist,

    (b) $f(z) = \cos z$ und C ein beliebiger Pfad von $1 + 2i$ nach $1 - 2i$ ist.

31. Berechnen Sie
$$\int_C \frac{1 + \sin 2z}{(z - 5i)(z^2 + 2iz - 2)}\mathrm{d}z,$$
wenn C das Dreieck mit den Eckpunkten -1, 1 und i ist, das in dem trigonometrischen Richtungssinn durchlaufen wird.

32. Berechnen Sie
$$\int_C \frac{z^4 + 25}{\cos(z)\cosh(z)}\mathrm{d}z,$$
wobei die Kurve C das Quadrat mit den Eckpunkten $\frac{1}{2}(-1 - i)$, $\frac{1}{2}(1 - i)$, $\frac{1}{2}(1 + i)$ und $\frac{1}{2}(-1 + i)$ ist, das in dem trigonometrischen Richtungssinn durchlaufen wird.

33. Berechnen Sie folgende komplexe Kurvenintegrale:

    (a)
$$\int_C \frac{\cos z}{(z + \frac{\pi}{4})(z^2 + 9)}\mathrm{d}z, \qquad C : |z| = 1,$$

    (b)
$$\int_C \frac{\sin z}{(z - \frac{\pi}{6})^4}\mathrm{d}z, \qquad C : |z| = 1.$$

34. Berechnen Sie die folgenden komplexen Kurvenintegerale (*ohne* Residuensatz), wobei Sie die Parametrisierung $\alpha : [0, 1] \to \mathbb{C}$ der Kurve C verwenden:

$$\text{a)} \int_C |z|\,dz, \qquad \alpha(t) = te^{2\pi it}, \qquad \text{b)} \int_C e^{2z}\,dz, \qquad \alpha(t) = t + it^2,$$
$$\text{c)} \int_C \frac{1}{1 + z^2}\,dz, \qquad \alpha(t) = 2e^{2\pi it}.$$

35. Bestimmen Sie die Residuen folgender Funktionen in ihren singulären Punkten:

$$a)\ f(z) = \frac{z+7}{z+2}, \qquad b)\ f(z) = \frac{e^{2z+1}}{(z-a)^3},\ a \in \mathbb{C},$$

$$c)\ f(z) = z^5 \cosh\left(\frac{1}{z^3}\right), \qquad d)\ f(z) = \frac{\sin z}{z^6}.$$

36. Berechnen Sie

$$\int_C \frac{z^3 e^{\frac{1}{z^2}}}{z-1}\,\mathrm{d}z,$$

wobei C durch die Gleichung

$$a)\ |z| = \frac{1}{3}, \qquad b)\ |z| = \frac{3}{2}$$

beschrieben ist.

37. (a) Entwickeln Sie die Funktion $f(z) = (z+z^3)(e^{\frac{1}{z^2}} + e^{\frac{1}{z-1}})$ in eine Laurentreihe, zuerst um den Punkt $z_0 = 0$, dann um den Punkt $z_0 = 1$.
    (b) Berechnen Sie $Res[f;0]$ und $Res[f,1]$.
    (c) Berechnen Sie folgendes Integral mit Hilfe des Residuensatzes

$$\int_{|z|=2} (z+z^3)(e^{\frac{1}{z^2}} + e^{\frac{1}{z-1}})\,dz.$$

38. Berechnen Sie folgende Integrale mit Hilfe des Residuensatzes:

$$a) \int_{|z|=1} \frac{5z^2-4z+1}{(z+2)(4z^2+1)}\,dz, \qquad b) \int_{|z|=1} \frac{\cos(z)}{z^2+4iz}\,dz,$$

$$c) \int_{|z|=2} \frac{z^6-3z^4+1}{(2z-1)(z^2+9)}\,dz, \qquad d) \int_{|z|=\pi} \frac{z+1}{z^2+9}\,dz.$$

39. Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung von

$$f(z) = \frac{z^2+z+1}{z^4+1}$$

und berechnen Sie damit *ohne* Residuensatz $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$, wobei γ der Kreis $|z-2| = 4$ ist.

40. Berechnen Sie folgende Integrale mit Hilfe des Residuensatzes:

$$a) \int_0^{2\pi} \frac{\cos(2x)}{5-4\cos(x)}\,dx; \qquad b) \int_0^{2\pi} \frac{1}{(5-3\sin x)^2}\,dx.$$

41. Berechnen Sie folgende Integrale mit Hilfe des Residuensatzes:

$$a) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z}{(z^2-2z+2)^2}\,dz, \qquad b) \int_0^{\infty} \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)}\,dz,$$

$$c) \int_0^{\infty} \frac{dz}{(1+z^2)^3}, \qquad d) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z}{1+z^4}\,dz.$$

42. Berechnen Sie folgende Integrale

$$a) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2+1}\,dx; \qquad b) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}\,dx.$$

Hinweis: Integrieren Sie entlang der Kurve $C_R = [-R, R] \cup H_R$, wobei H_R der Halbkreis (in der oberen oder unteren Halbebene) mit dem Mittelpunkt im Ursprung und dem Radius R ist.

43. Bestimmen Sie die Fourier-Transformierte der Funktion $f(x) = \exp(-x^2/2)$.
Hinweis: Berechnen Sie das Integral

$$\int_{\gamma_R} e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz,$$

wobei γ_R das Rechteck mit den Eckpunkten $-R, R, R+it, -R+it$ bezeichnet. Lassen Sie $R \to \infty$ streben und benützen Sie, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \sqrt{2\pi}.$$

44. Bestimmen Sie die LAPLACE-Transformation $\mathcal{L}\{f\}$ von

$$a)\ \sin^2(\omega t), \qquad b)\ \cosh^2(2t), \qquad c)\ te^{3t}.$$

Hinweis: Verwenden Sie $\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$.

45. Bestimmen Sie die Rücktransformation $f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s))$ von

$$a)\ \frac{5}{s^2-7s+12}, \qquad b)\ \frac{23}{(s+3)^5}, \qquad c)\ \frac{7}{s^2+s+1}, \qquad d)\frac{s+1-2\alpha}{s^2+2s+\alpha^2+1}.$$

46. Lösen Sie mit Hilfe der LAPLACE-Transformation folgende Anfangswertprobleme:

   (a) $y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = e^{-t}(\cos t + 3\sin t)$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$;

   (b) $y''(t) - 2y'(t) + 4y(t) = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;

   (c) $y'''(t) - y'(t) = 3(2 - t^2)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 1$;

   (d) $9y''(t) - 6y'(t) + y(t) = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 1$.

47. Lösen Sie folgende Anfangswertprobleme mit Hilfe der LAPLACE-Transformation und des Faltungssatzes:

$$\begin{array}{lll} a)\ y''(t) + y(t) = 5t, & y(0) = 0, & y'(0) = 0; \\ b)\ y''(t) + y(t) = \frac{3}{2}\sin(2t), & y(0) = 0, & y'(0) = 0. \end{array}$$

48. Lösen Sie folgende Integralgleichungen mit Hilfe der der LAPLACE-Transformation und des Faltungssatzes:

   (a) $y(x) = xe^x - 2e^x \int_0^x e^{-t}y(t)dt$,

   (b) $y(x) = x + e^x - \int_0^x y(t)\cosh(x-t)dt$.

49. Bestimmen Sie mit Hilfe der LAPLACE-Transformation eine beschränkte Lösung des Problems

$$\begin{array}{rl} \text{Dgl.:} & u_{tt} = 9u_{xx}\,, x > 0\,, t > 0, \\ \text{RB:} & u(0,t) = -4\sin 2t\,,\ t > 0\,, \\ \text{AB:} & u(x,0) = u_t(x,0) = 0\,, x > 0\,. \end{array}$$

50. Berechnen Sie den Flächeninhalt der Fläche F

    (a) die durch folgende Parametrisierung gegeben ist:

    $$\vec{x}(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 3(1-\frac{r}{4}) \end{pmatrix};\ \text{mit } 2 \le r \le 4 \text{ und } 0 \le \varphi \le 2\pi,$$

    (b) die von $z = xy$ und $x^2 + y^2 \le 1$ begrenzt wird.

51. Man berechne das Oberflächenintegral

    $$\iint_F \begin{pmatrix} z \\ x+y \\ -x \end{pmatrix} d\vec{A},$$

    (a) wenn F die ebene Fläche $z + 3x + 2y = 3$, $x, y, z \ge 0$ ist;
    (b) wenn F die Oberfläche der Halbkugel $z^2 + x^2 + y^2 = 4$, $z \ge 0$ ist;
    (c) wenn F die Oberfläche des Paraboloids $z = x^2 + y^2$, $z \le 1$ ist.

52. Verifizieren Sie den Satz von Stokes im Falle des Vektorfeldes $\vec{K} = \begin{pmatrix} xy^2 \\ x^2y + z \\ 2xz \end{pmatrix}$ und der Oberfläche F, die gegeben wird durch $x^2 + 4y^2 = z$ und $z < 1$.

53. Verwenden Sie den Satz von Stokes um das Kurvenintegral $\int_C \vec{K} d\vec{x}$ zu berechnen. Dabei sei

    $$\vec{K} = \begin{pmatrix} x + yz \\ \cos y + z^2 \\ -2x + e^z \end{pmatrix}$$

    und die Kurve C sei die Schnittmenge der Flächen $z = x$ und $2x^2 = 1 + z^2 - y^2$.

54. Berechnen Sie mit dem Satz von Gauss das Oberflächenintegral $\iint_S (\vec{K} \cdot \vec{n}) dA$. Dabei sei

    $$\vec{K} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

    und F die Oberfläche des Tetraeders der von den Ebenen $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = a$, $a > 0$ begrenzt wird.

55. Berechnen Sie mit dem Satz von Gauss das Oberflächenintegral $\iint_S (\vec{K} \cdot \vec{n}) dA$. Dabei sei

    $$\vec{K} = \begin{pmatrix} x^3 \\ y^3 \\ z^3 \end{pmatrix}$$

    und F die geschlossene Oberfläche $x^2 + y^2 = z^2$ mit $0 \le z \le h$.

56. Lösen Sie mit der Fourier-Methode folgendes Saitenschwingungsproblem:

$$u_{tt} = u_{xx},$$

unter den Rand- und Anfangswertbedingungen

$$\begin{aligned} u(0,t) &= 0, & u(\pi,t) &= 0, \\ u(x,0) &= 0, & u_t(x,0) &= k\sin(2x). \end{aligned}$$

57. Lösen Sie mit der Fourier-Methode folgendes Saitenschwingungsproblem:

$$\begin{array}{rl} \text{Dgl.:} & u_{tt} = u_{xx} + \sin(2x)e^{-t}, \\ \text{RB:} & u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad t > 0, \\ \text{AB:} & u(x,0) = 7\sin(6x), \quad u_t(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le \pi. \end{array}$$

58. Lösen Sie mit der Fourier-Methode folgende Wärmeleitungsgleichung:

$$\begin{array}{rl} \text{Dgl.:} & u_t = u_{xx} + 3, \\ \text{RB:} & u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 2, \quad t > 0, \\ \text{AB:} & u(x,0) = 1 + x^2, \quad 0 \le x \le 1. \end{array}$$

59. Lösen Sie mit der Fourier-Methode folgendes Saitenschwingungsproblem:

$$u_{tt} = 3u_{xx},$$
$$u(0,t) = 1, \qquad u(\pi,t) = t,$$
$$u(x,0) = \cos x \sin x, \qquad u_t(x,0) = \sin 3x,$$

(6 Punkte)

60. Lösen Sie mit der Fourier-Methode folgendes Wärmeleitungsproblem

$$u_t = u_{xx},$$
$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0,$$
$$u(x,0) = 1 - \frac{x}{\pi}.$$

61. Lösen Sie mit der Fourier-Methode folgende Wärmeleitungsgleichung:

$$\begin{array}{rl} \text{Dgl.:} & u_t = u_{xx} + 3, \\ \text{RB:} & u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 2, \quad t > 0, \\ \text{AB:} & u(x,0) = 1 + x^2, \quad 0 \le x \le 1. \end{array}$$