

Folie zur Vorlesung "Mathematik B"

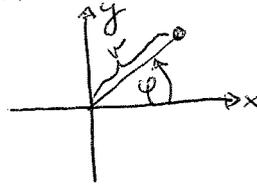
01. Juni 2010

Beispiele zur Transformationsregel:

1. Polarkoordinaten:

Allgemein kann man Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit Hilfe von Polarkoordinaten (r, φ) mit $r \geq 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$ eindeutig darstellen:

$$x = x_1(r, \varphi) = r \cos \varphi, \quad y = x_2(r, \varphi) = r \sin \varphi.$$



Die zugehörige Jacobimatrix ist gegeben durch

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r} & \frac{\partial x_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x_2}{\partial r} & \frac{\partial x_2}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}$$

Die Jacobideterminante ist somit $\det J = r \cos^2 \varphi - (-r \sin^2 \varphi) = r$.

Aufgabe: Gesucht ist das Integral $\int_D f(x, y) dx dy$ mit

$$f(x, y) = 2x\sqrt{x^2 + y^2} \text{ und}$$

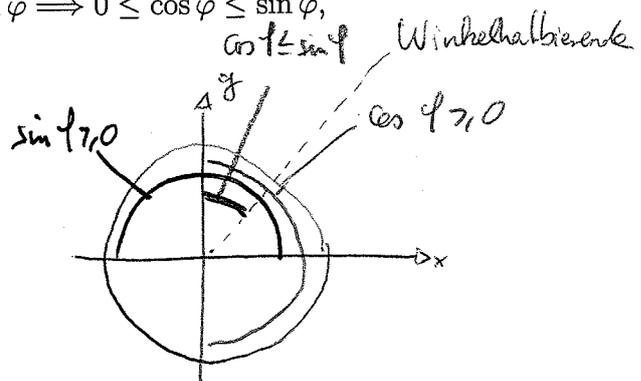
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq y, x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Lösung: Wir gehen zu Polarkoordinaten über und ersetzen $x = r \cos \varphi$ und $y = r \sin \varphi$. Da wir über D integrieren, müssen wir die neuen Grenzen für r und φ bestimmen:

- Aus der Bedingung $0 \leq x \leq y$ folgt

$$0 \leq r \cos \varphi \leq r \sin \varphi \implies 0 \leq \cos \varphi \leq \sin \varphi,$$

d.h. $\varphi \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$. (Skizze!)



- Aus der Bedingung $x^2 + y^2 \leq 4$ folgt eingesetzt $r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi = r^2 \leq 4$, d.h. $0 \leq r \leq 2$.

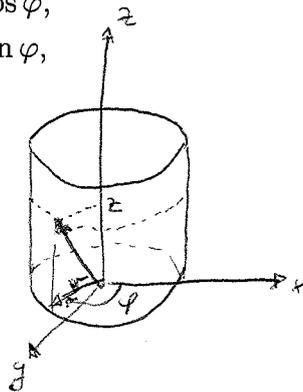
Es ist $f(x, y) = 2r \cos \varphi \sqrt{r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi} = 2r^2 \cos \varphi$. Somit ergibt sich das gesuchte Integral wie folgt:

$$\begin{aligned} \int_D f(x, y) dx dy &= \int_{\varphi=\pi/4}^{\pi/2} \int_{r=0}^2 f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \cdot |\det J| dr d\varphi \\ &= \int_{\varphi=\pi/4}^{\pi/2} \int_{r=0}^2 2r^2 \cos \varphi \cdot r dr d\varphi = \int_{\varphi=\pi/4}^{\pi/2} \int_{r=0}^2 2r^3 \cos \varphi dr d\varphi \\ &= \int_{\varphi=\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{2} r^4 \cos \varphi \Big|_0^2 d\varphi \\ &= \int_{\varphi=\pi/4}^{\pi/2} 8 \cos \varphi d\varphi = 8 \sin \varphi \Big|_{\varphi=\pi/4}^{\pi/2} = 8 - \frac{8}{\sqrt{2}} = 8 - 4\sqrt{2}. \end{aligned}$$

2. Zylinderkoordinaten:

Allgemein kann man Punkte $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ mit Hilfe von Zylinderkoordinaten (r, φ, z) mit $r \geq 0$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ und $z \in \mathbb{R}$ eindeutig darstellen:

$$\begin{aligned} x &= x_1(r, \varphi, z) = r \cos \varphi, \\ y &= x_2(r, \varphi, z) = r \sin \varphi, \\ z &= x_3(r, \varphi, z) = z. \end{aligned}$$



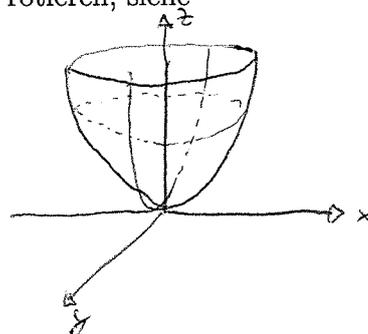
Die zugehörige Jacobimatrix ist gegeben durch

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r} & \frac{\partial x_1}{\partial \varphi} & \frac{\partial x_1}{\partial z} \\ \frac{\partial x_2}{\partial r} & \frac{\partial x_2}{\partial \varphi} & \frac{\partial x_2}{\partial z} \\ \frac{\partial x_3}{\partial r} & \frac{\partial x_3}{\partial \varphi} & \frac{\partial x_3}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Jacobideterminante ist somit $\det J = r \cos^2 \varphi - (-r \sin^2 \varphi) = r$.

Aufgabe: Eine Parabel lasse man um die z -Achse im \mathbb{R}^3 rotieren; siehe Skizze. Man berechne das Volumen des Körpers

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}.$$



Lösung: Wir gehen zu Zylinderkoordinaten über und ersetzen $x = r \cos \varphi$ und $y = r \sin \varphi$ und $z = z$. Da wir über K integrieren, müssen wir die neuen Grenzen für r , φ und z bestimmen:

- Aus der einzigen Bedingung $x^2 + y^2 \leq z \leq 1$ folgt $r^2 \leq z \leq 1$, d.h. $\varphi \in [0, 2\pi)$, $0 \leq r \leq 1$ und $r^2 \leq z \leq 1$.

Da wir ein Volumen berechnen ist das Integral der konstanten Funktion 1 über dem Bereich K zu berechnen. Somit ergibt sich das gesuchte Integral wie folgt:

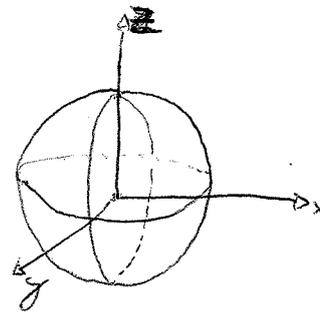
$$\begin{aligned} \int_K 1 \, dx \, dy \, dz &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^1 \int_{z=r^2}^1 1 \cdot r \, dz \, dr \, d\varphi \\ &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^1 r z \Big|_{r^2}^1 \, dr \, d\varphi \\ &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^1 r - r^3 \, dr \, d\varphi \\ &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left. \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right|_0^1 \, dr \, d\varphi \\ &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{1}{4} \, d\varphi = \frac{1}{4} \varphi \Big|_0^{2\pi} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

3. Kugelkoordinaten:

Allgemein kann man Punkte $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ mit Hilfe von Kugelkoordinaten (r, φ, ν) mit $r \geq 0$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ und $\nu \in [0, \pi]$ eindeutig darstellen:

$$\begin{aligned} x &= x_1(r, \varphi, \nu) = r \cos \varphi \sin \nu, \\ y &= x_2(r, \varphi, \nu) = r \sin \varphi \sin \nu, \\ z &= x_3(r, \varphi, \nu) = r \cos \nu. \end{aligned}$$

$\varphi \hat{=}$ Längengrad
 $\nu \hat{=}$ Breitengrad
 $r \hat{=}$ Radius



Man beachte, daß $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. Die zugehörige Jacobimatrix ist gegeben durch

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r} & \frac{\partial x_1}{\partial \varphi} & \frac{\partial x_1}{\partial \nu} \\ \frac{\partial x_2}{\partial r} & \frac{\partial x_2}{\partial \varphi} & \frac{\partial x_2}{\partial \nu} \\ \frac{\partial x_3}{\partial r} & \frac{\partial x_3}{\partial \varphi} & \frac{\partial x_3}{\partial \nu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \nu & -r \sin \varphi \sin \nu & r \cos \varphi \cos \nu \\ \sin \varphi \sin \nu & r \cos \varphi \sin \nu & r \sin \varphi \cos \nu \\ \cos \nu & 0 & -r \sin \nu \end{pmatrix}$$

Die Jacobideterminante ist somit

$$\begin{aligned} \det J &= -r^2 \cos^2 \varphi \sin^3 \nu - r^2 \sin^2 \varphi \sin \nu \cos^2 \nu \\ &\quad - r^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \nu \sin \nu - r^2 \sin^2 \varphi \sin^3 \nu \\ &= -r^2 \sin^3 \nu - r^2 \sin \nu \cos^2 \nu = -r^2 \sin \nu. \end{aligned}$$

Also: $|\det J| = r^2 \sin \nu$.

Aufgabe: Man berechne das Integral $\int_D f(x, y, z) dx dy dz$ mit

$$f(x, y, z) = (x^2 + y^2)z, \quad D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq y, 0 \leq z, x^2 + y^2 + z^2 \leq y\}.$$

Da wir über D integrieren, müssen wir die neuen Grenzen für r , φ und ν bestimmen:

- Aus $0 \leq y = r \sin \varphi \sin \nu$ folgt wegen $r \geq 0$ und $\sin \nu \geq 0$ die Ungleichung $0 \leq \sin \varphi$, d.h. $\varphi \in [0, \pi]$.
- Aus $0 \leq z = r \cos \nu$ folgt wegen $r \geq 0$ die Ungleichung $0 \leq \cos \nu$, d.h. $\nu \in [0, \pi/2]$.
- Aus der Bedingung $x^2 + y^2 + z^2 \leq y$ folgt $r^2 \leq r \sin \varphi \sin \nu$, d.h. $0 \leq r \leq \sin \varphi \sin \nu$.

Es ist $f(x, y, z) = r^2 \sin^2 \nu \cdot r \cos \nu = r^3 \sin^2 \nu \cos \nu$. Somit ergibt sich das gesuchte Integral wie folgt:

$$\begin{aligned} \int_D f(x, y, z) dx dy dz &= \int_{\varphi=0}^{\pi} \int_{\nu=0}^{\pi/2} \int_{r=0}^{\sin \varphi \sin \nu} r^3 \sin^2 \nu \cos \nu \cdot r^2 \sin \nu dr d\nu d\varphi \\ &= \int_{\varphi=0}^{\pi} \int_{\nu=0}^{\pi/2} \int_{r=0}^{\sin \varphi \sin \nu} r^5 \sin^3 \nu \cos \nu dr d\nu d\varphi \\ &= \int_{\varphi=0}^{\pi} \int_{\nu=0}^{\pi/2} \frac{1}{6} r^6 \sin^3 \nu \cos \nu \Big|_0^{\sin \varphi \sin \nu} d\nu d\varphi \\ &= \int_{\varphi=0}^{\pi} \int_{\nu=0}^{\pi/2} \frac{1}{6} \sin^6 \varphi \sin^9 \nu \cos \nu d\nu d\varphi \\ &= \int_{\varphi=0}^{\pi} \frac{1}{6} \sin^6 \varphi \frac{1}{10} \sin^{10} \nu \Big|_0^{\pi/2} d\varphi \\ &= \int_{\varphi=0}^{\pi} \frac{1}{60} \sin^6 \varphi d\varphi = \dots = \frac{1}{60} \frac{5\pi}{16} = \frac{\pi}{192}. \end{aligned}$$

Zur Berechnung des letzten Integrals verwende man die Rekursionsformeln zu Integralen der Form $\int \sin^k \varphi d\varphi$; siehe Skriptum Seite F-23.