Das ist ja unmöglich!

Christian Elsholtz und Benedikt Hahn

Graz University of Technology

1) Unmöglichkeit in der Mathematik - von den Griechen zum 15-Schiebespiel

Die Griechen wollten geometrische Konstruktionen nur mit Zirkel und Lineal konstruieren. Einen beliebigen Winkel halbieren ist leicht. Aber einen beliebig vorgegebenen Winkel in drei gleiche Teile zerlegen konnten sie nicht. (Bei einem Winkel von **180**^{o} geht es, bei einem Winkel von **60**^{o} aber nicht!) Auch wussten die Griechen nicht, wie man ausgehend von einem Kreis ein Quadrat mit dem gleichen Flächeninhalt konstruiert.
Erst viel später bewies Pierre Wantzel (1837) mit algebraischen Methoden, dass man den Winkel tatsächlich nicht in drei gleiche Teile zerlegen kann. Er bewies also, dass die sehr lange Suche nach der Winkeldreiteilung mit Zirkel und Lineal scheitern musste!

Auch heute noch gibt es Probleme, an denen man sich den Kopf zerbricht. Wenn man nach langem Probieren keine Lösung findet, liegt der Gedanke nahe "Das ist ja unmöglich!". Aber wie kann man sich da sicher sein?

Hier beschäftigen wir uns mit einem Beispiel für dieses Phänomen. Es handelt sich um ein Rätsel, das vor über 100 Jahren viele Menschen zur Verzweiflung brachte:
Kann man die Ziffern 1-15 bei dem 15-Legespiel ausgehend von Bild A durch verschieben des leeren Feldes so umsortieren, dass nur die Zahlen 14 und 15 vertauscht sind? (Bild D).

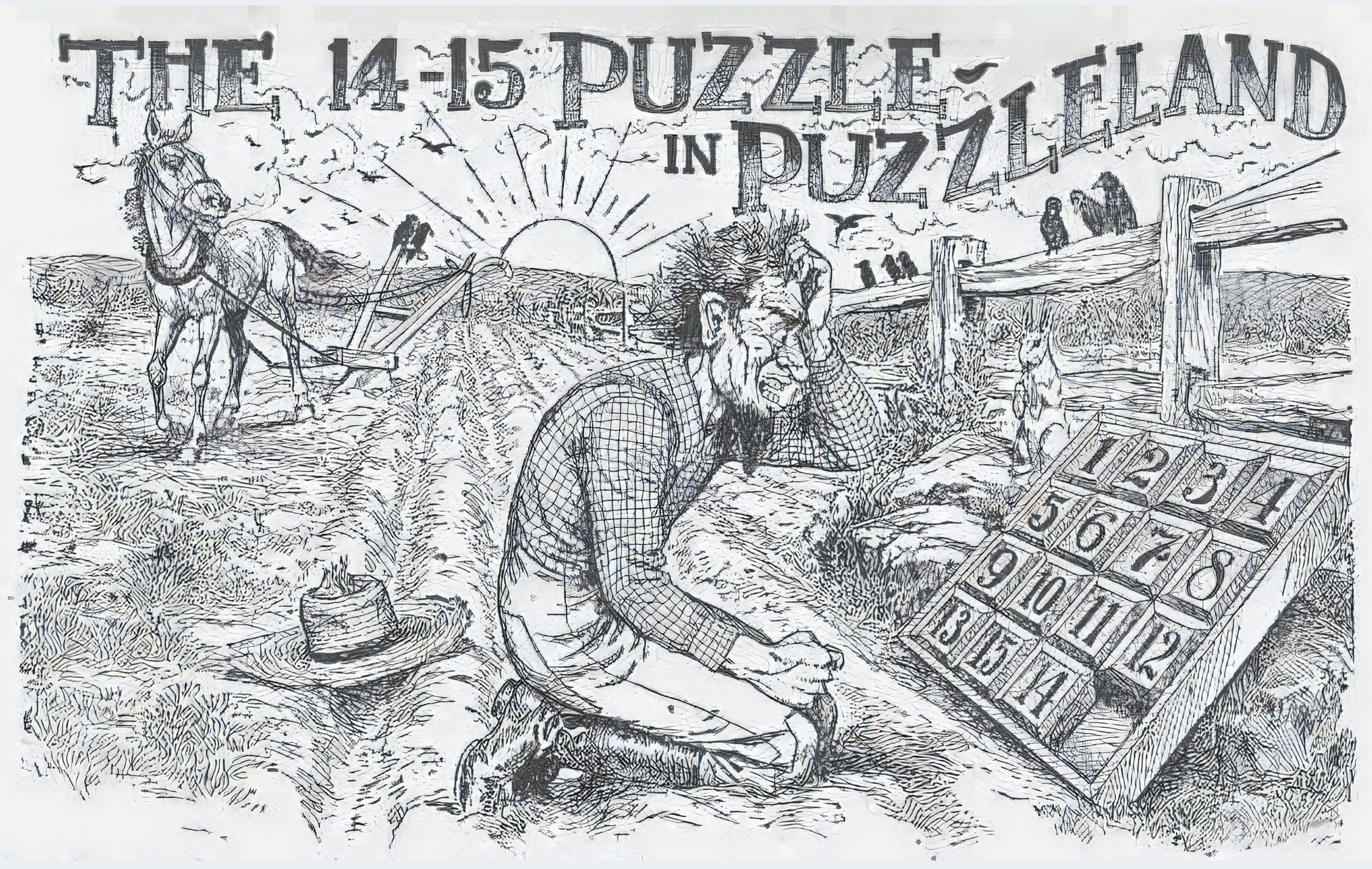

Illustration aus 1914. Für eine Lösung des Rätsels hat Sam Loyd damals $1.000 (heute ≈ 30.000€) geboten.

2) Vier Diagramme

A ($F_A = 0$)

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	(16)

B ($F_B = 105$)

15	14	13	12
11	10	9	8
7	6	5	4
3	2	1	(16)

C ($F_C = 120$)

(16)	15	14	13
12	11	10	9
8	7	6	5
4	3	2	1

D ($F_D = 1$)

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	(15)	(14)	(16)

Die **(16)** symbolisiert das Leerfeld.

Versuchen Sie es! Ausgehend von A, welche der Konfigurationen B, C oder D erreichen Sie?

3) Tipps

Haben Sie es geschafft, von A nach D zu kommen? Dann könnten Sie sich jetzt bei Sam Loyd melden und seine 1.000$ einfordern. Bisher hat das nämlich noch niemand geschafft... Hier ein paar Gedankenanstöße, um dem Rätsel auf die Schliche zu kommen.

1. Hätte das Gitter nur die Größe 2 mal 2, könnte man dann von der Startkonfiguration 1,2,3 4 alle anderen möglichen Konfigurationen erreichen (z.B. 1,3,2, 4)?
2. Beginnend in Konfiguration A, nach wievielen Zügen kann das leere Feld (16) zu seinem Startpunkt zurückfinden? (Nach 1,2,3,4,5,... Zügen?) Als *ein Zug* zählt hier das Vertauschen von dem Leerfeld mit einem Nachbarfeld.
3. Da das Leerfeld in A und D an der gleichen Position ist, warum kann man (wenn überhaupt) D von A nur nach einer geraden Anzahl von Zügen erreichen?
4. Um von A nach D zu kommen darf man nur die Reihenfolge von genau einem Paar (14 und 15) tauschen. Alle anderen Paare (zum Beispiel 4 und 14) bleiben in der richtigen Reihenfolge.
5. Die Reihenfolge von wievielen Paaren vertauscht man bei einem horizontalem Zug?
6. Und die Reihenfolge von wievielen Paaren vertauscht man bei einem vertikalen Zug?
7. Kann die Anzahl der Züge, die man von A nach D braucht, gerade sein, wenn man obige Punkte 4, 5, und 6 zusammen betrachtet?
8. Was lässt sich aus Punkt 3 und Punkt 7 gemeinsam folgern?

Eine vollständige Erklärung findet sich auf dem zweiten Poster.

Das ist ja unmöglich!

Christian Elsholtz und Benedikt Hahn

4) Unmöglichkeitsbeweis

Zu 3: Man stelle sich die 16 Positionen vor als wären sie im Schachbrettmuster gefärbt. Sagen wir, die Position vom Leerfeld 16 in A und D ist weiß. Dann wechselt das Leerfeld bei jedem Zug die Farbe. Also ist das Leerfeld nach 1,2,3,.. Zügen auf einem schwarzen, weißen, schwarzen,... Feld. Da die Startposition vom Leerfeld weiß ist, kann das Leerfeld dort also nur nach 2,4,6,... Zügen (also nur nach gerade vielen Zügen) zurückkehren.

Zu 4: Wir erklären genauer, was wir mit der *Reihenfolge* von einem Zahlenpaar meinen: Für jedes Paar von zwei Zahlen (z.B. (1,4), (3,7), oder (4,15)) in einer Konfiguration sagen wir, dass das Paar *in der richtigen Reihenfolge* liegt, wenn die kleinere Zahl in Leserichtung vor der größeren Zahl vorkommt. Andernfalls sagen wir dass das Paar *in der falschen Reihenfolge* liegt. Zum Beispiel ist (1,16) in A, B und D in der richtigen Reihenfolge, aber in C in der falschen Reihenfolge.
In ***A*** sind alle Paare in der richtigen Reihenfolge, in ***B*** sind nur die Paare mit 16 in der richtigen Reihenfolge, in ***C*** sind alle Paare in der falschen Reihenfolge und in ***D*** sind alle Paare bis auf (14,15) in der richtigen Reihenfolge.
Für eine gegebene Konfiguration interessiert uns jetzt, wieviele Paare in der falschen Reihenfolge liegen. Wir bezeichnen diese Zahl mit ***F***. Der Wert von F ist für ***A*** genau 0, für ***B*** schon 105, für ***C*** sogar 120 und für ***D*** nur 1.

Zu 5: Mit der Notation aus **4**, ist die Frage, wie sich ***F*** bei einem horizontalen Zug verändert. Zum Beispiel Vertauschen von 1 und 16 in B. Die meisten Paare ändern ihre Reihenfolge bei einem horizontalen Zug nicht. Nur das Paar, das durch den Zug bewegt wird, wechselt seine Reihenfolge. In B war (1,16) vor dem Zug in der *richtigen Reihenfolge* und es war $\boldsymbol{F} = \mathbf{105}$. Danach ist (1,16) in der *falschen Reihenfolge*, also $\boldsymbol{F} = \mathbf{106}$. Sind zwei Zahlen aber vor einem horizontalen Zug in der *falschen Reihenfolge* waren, dann sind sie danach in der *richtigen Reihenfolge* und ***F*** wird um 1 kleiner. Bei einem horizontalen Zug ändert sich ***F*** also um genau **1**.

5) Unmöglichkeitsbeweis

Zu 6: Bei einem vertikalen Zug, zum Beispiel beim Vertauschen von 4 und 16 in B, kann man ähnlich argumentieren. Die Reihenfolge der meisten Paare bleibt auch hier unverändert. Nur das Paar der beiden Zahlen die vertauscht wurden (4, 16), sowie die Paare (4,3), (4,2), (4,1), (3,16), (2,16), (1,16) ändern ihre Reihenfolge, insgesamt also 7 Paare. Es ist aber egal, wo genau ein vertikaler Zug durchgeführt wird, es wechseln immer genau **7** Paare ihre Reihenfolge.

Zu 7: In 5 und 6 haben wir gezeigt, dass ein Zug die Reihenfolge von entweder genau einem oder genau 7 Paaren ändert. ***F*** wechselt mit jedem Zug also zwischen einem geraden und einem ungeraden Wert.
Da in A aber $\boldsymbol{F} = \mathbf{0}$, also ***F*** gerade ist, ist ***F*** nach einer geraden Anzahl von Zügen also gerade, und nach einer ungeraden Anzahl von Zügen ist ***F*** ungerade. Weil in D $\boldsymbol{F} = \mathbf{1}$ gilt, braucht man also ungerade viele Züge von A nach D!

Zu 8: Punkt 3 sagt, dass man von A nach D eine gerade Anzahl von Zügen braucht. Punkt 7 wiederum erklärt, dass man eine ungerade von Zügen benötigt. Dieser Widerspruch zeigt, dass man D von A nicht erreichen kann!

Permutationen

Es gibt $\mathbf{16!/2 = 10.461.394.944.000}$, also etwa 10 Billionen erreichbare Konfigurationen und genauso viele unerreichbare Konfigurationen. Alleine schon für alle erreichbaren Konfigurationen die kürzesten Zugfolgen zu finden, war erheblicher Aufwand. Die maximale Zugfolge benötigt 80 Züge.
Es gibt genau 17 Anordnungen, für die man auch beim optimalen Schieben diese 80 Züge benötigt! Wenn man bei A startet ist eine davon

15	14	8	12
10	11	9	13
2	6	5	1
3	7	4	(16)