Blatt 1
10.4.2000

Kombinatorische Geometrie

SS 2000
Dr. Elsholtz

Hinweis: Aufgaben 1 und 2 sind einfach.
Aufgaben 3 und 4 sind schwer.
Aufgabe 4 wird in der nächsten Vorlesung behandelt.
Aufgabe 5 ist ein Ausblick, der später in der Vorlesung behandelt wir. Machen Sie sich aber immer wieder mal Gedanken darüber!

Aufgabe 1
Veranschaulichen Sie sich den Begriff der konvexen Menge. Sind folgende Mengen konvex: Ball, Parallelogramm, Brezel, Kegel, Doppelkegel, Ellipse, Rettungsring?

Aufgabe 2
Verändern Sie die Voraussetzungen des Satzes von Minkowski.

a) Verzichten Sie auf die Bedingung „konvex“.

b) Verzichten Sie auf die Bedingung „symmetrisch“.

c) Verändern Sie Vol $C > 2^d$ zu Vol $C \geq 2^d$.

Können Sie damit noch einen sinnvollen Satz beweisen?

Aufgabe 3
Man beweise: Jede Primzahl p der Form $8k+1$ oder $8k+3$, $k \in \mathbb{N}$, hat eine Darstellung der Form $p = x^2 + 2y^2$, $x, y \in \mathbb{N}$.
Möglicher Lösungsweg:

(i) Zunächst nehmen wir an, dass die Kongruenz $u^2 \equiv -2 \bmod p$ eine Lösung u_0 hat. (Dies wird in (iii) bewiesen). (Daher ist auch $x^2 + 2y^2 \equiv 0 \bmod p$ lösbar.) Zeige, dass die Punkte $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ mit $b \equiv au_0 \bmod p$ ein Gitter bilden und bestimme die Größe der Fundamentalmasche.

(ii) Man zeige, dass die Ellipse $x^2 + 2y^2 \leq r^2$ für geeignetes r einen Gitterpunkt mit $0 < x^2 + 2y^2 < 2p$ enthält. Warum ist man dann fertig?

(iii) Nun zeigen wir noch, dass die Kongruenz $u^2 \equiv -2 \bmod p$ eine Lösung hat. Man beweise hierzu den folgenden Hilfssatz, (Lemma von Gauß): Es sei p eine ungerade Primzahl mit $p \nmid a$. Man reduziere die $\frac{p-1}{2}$ Zahlen $a, 2a, 3a, \ldots, \frac{p-1}{2}a$ modulo p so, dass die Reste zwischen 0 und p liegen. Es sei μ die Anzahl der Reste, die größer als $\frac{p}{2}$ sind. Dann gilt: $u^2 \equiv a \bmod p$ ist genau dann lösbar, wenn μ gerade ist. Daraus zeige man nun, dass für Primzahlen der Form $p = 8k+1$ bzw. $p = 8k+3$ die Kongruenz $u^2 \equiv -2 \bmod p$ lösbar ist.

Aufgabe 4
Man beweise: Jede natürliche Zahl m kann in der Form

$$m = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2, \quad x_i \in \mathbb{Z}$$

geschrieben werden.
Möglicher Lösungsweg:

(i) Wenn m_1 und m_2 jeweils als Summe von vier Quadraten darstellbar sind, dann ist es auch ihr Produkt $m_1 m_2$. Hierzu kann man z.B. die Matrizenmultiplikation von Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix}$$

mit $z, w \in \mathbb{Z}[i]$ betrachten.

Eine andere Möglichkeit ist, dass man $(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)(y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2)$ ausmultipliziert und geschickt zusammenfasst, so dass man es als Summe von 4 Quadraten schreibt.

(ii) Sei p prim. Man zeige (z.B. durch Abzählen): Die Kongruenz $u^2 + v^2 + 1 \equiv 0 \mod p$ hat eine Lösung mit $u, v \in \mathbb{Z}$.

(iii) Das Volumen V der 4-dimensionalen Kugel (im $\mathbb{R}^4$)

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \leq r^2$$

ist durch $V = \dfrac{\pi^2 r^4}{2}$ gegeben. (Analysis - Vorlesung.)

(iv) Wähle ein geeignetes 4-dimensionales Gitter, dessen Fundamentalbereich ein Volumen von p^2 hat, um mit dem Gitterpunktsatz von Minkowski die Existenz der Darstellung

$$p = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

für die Primzahl p zu zeigen.
Mit (i) und (iv) ist dann alles gezeigt.

Aufgabe 5
Gegeben sei ein Wurm der Länge 1. Der Wurm liege unendlich flach in der Ebene, kann sich aber beliebig krümmen und knoten. Geben Sie eine sehr einfache Figur an, die den Wurm vollständig überdeckt, egal wie er sich gerade krümmt.

Versuchen Sie nun, eine möglichst kleine Fläche zu wählen, die auch noch diese Eigenschaft hat.