Blatt 2
17.4.2000

Kombinatorische Geometrie

SS 2000
Dr. Elsholtz

Aufgabe 1

a) Stellen Sie die Anzahl der Kanten, Ecken und Seiten der fünf platonischen Körper tabellarisch zusammen. Sehen Sie Symmetrien in der Tabelle?

b) Welchen regelären Polyeder erhält man, wenn man die Mitten der Flächen eines Würfels als Punkte eines Polyeders auffasst? Analog für die anderen Polyeder.

c) Beweisen Sie auf diese Weise aus der in der Vorlesung bewiesenen Existenz des Ikosaeders die Existenz des Dodokaeders.

Aufgabe 2

Historisch verwendete man lange keine exakte Definition der platonischen Körper. Man kannte die 5 Polyeder und wusste, dass es keine weiteren gibt. Erste Versuche einer Definition waren aber falsch, weil auch andere Polyeder den Forderungen genügt hätten.

a) Zeigen Sie, dass folgende (implizit von Euklid stammende) Definition falsch ist:
Die Seitenflächen müssen regelmäßige n-Ecke und untereinander gleich sein.

b) Definieren Sie den Begriff „regulärere Polyeder“, so dass genau die fünf platonischen Körper erfasst sind.

Aufgabe 3

a) Wenn Sie dies nicht in der Analysis-vorlesung gemacht haben, berechnen Sie das Volumen bzw. die Oberfläche der Kugel (im $\mathbb{R}^3$) durch Kugelkoordinaten.

b) Wie verhält sich das Volumen der Einheitskugel für $n \to \infty$? Ist Ihnen mit dem Ergebnis anschaulich klar, dass für unendlich dimensionale Vektorräume die Einheitskugel nicht kompakt sein kann?

Die folgenden Aufgaben sind weniger Hausaufgaben im klassischen Sinne, sondern sollen Anregungen geben, sich selbständig mit den Themen zu beschäftigen, sich aus Bibliothek oder Internet Informationen zu beschaffen etc.

Aufgabe 4

Gegeben sei ein Wurm der Länge 1. Der Wurm liege unendlich flach in der Ebene, kann sich aber beliebig krümmen und knoten. Gesucht sind möglichst kleine Figuren, die den Wurm überdecken, egal wie er sich gerade krümmt. Berechnen Sie jeweils den Flächeninhalt der Figuren.

a) Zeigen Sie, dass eine Kreisscheibe mit Durchmesser 1 ausreicht. (Sehr einfach).

b) Stellen Sie eine Vermutung auf, wie eine deutlich kleinere überdeckende Fläche aussehen könnte.

c) Zeigen Sie, dass ein Halbkreis mit Durchmesser 1 ebenfalls ausreicht. Vielleicht finden Sie sogar verschiedene Beweise? Können Sie bei dem Halbkreis noch etwas abschneiden?

d) Versuchen Sie, möglichst „schwer" überdeckbare Würmer zu konstruieren, und nehmen Sie diese als Testfall für neue Vermutungen.

e) Nehmen Sie an, die Fläche sei konvex. Können Sie untere Schranken für die kleinste mögliche Fläche angeben?

Aufgabe 5
Suchen Sie Literatur oder Informationen aller Art zu diesem Problem. Hinweis: Das Problem stammt von Leo Moser und ist in der Tat als Wurmproblem bekannt.

Aufgabe 6
Überlegen Sie sich, welche der platonischen Körper man leicht in beliebige Dimension übertragen kann. Suchen Sie Literatur, wo Sie eine Klassifikation aller regulären Polyeder im $\mathbb{R}^n$ finden.

Aufgabe 7

a) Auf wieviele Arten kann man ein Dodokaeder (oder die anderen platonischen Körper) durch Drehungen in sich selbst überführen?

b) Wenn Sie möchten, können Sie sich ansehen, warum die Gruppe, die alle Drehungen eines Dodokaeders beschreibt, (und das ist die alternierende Gruppe A_5), eine einfache Gruppe ist. (Eine einfache Gruppe hat keine nichttrivialen Normalteiler). American Mathematical Monthly 95, 1988, 344-349.

Aufgabe 8
Die Gruppe $SO(3, \mathbb{R})$ ist geometrisch die Gruppe aller Drehungen. (D.h. Sie haben im $\mathbb{R}^3$ eine Drehachse durch den Urspung.) Insbesondere wird die Einheitskugel von Elementen aus $SO(3, \mathbb{R})$ auf sich selbst abgebildet.

Können Sie alle endlichen Untergruppen dieser Gruppe angeben? Überlegen Sie sich, was passiert, wenn eine Untergruppe genau eine Drehachse hat...
Was hat die Aufgabe mit platonischen Körpern zu tun?