Die platonischen (regulären) Polyeder

Es folgen ein paar allgemeine Definitionen und Informationen. Damit werden die Aufgaben von Blatt 2 teilweise beantwortet. Wer sich näher informieren möchte, sehe sich die folgenden Bücher an. Diese gehen auch sehr ausführlich auf mögliche Verallgemeinerungen (z.B. halbreguläre, höherdimensionale oder sternförmige Polyeder etc.)

Peter R. Cromwell, Polyhedra, Cambridge University Press, 1997.

L. Fejes Tóth, Reguläre Figuren, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1965.

Den Zusammenhang zur Gruppentheorie findet man gut erklärt in:

Peter M. Neumann, Gabrielle A. Stoy, Edward C. Thompson, Groups and Geometry, Oxford University Press, 1994.

- Die Aufzählung der fünf platonischen Körper ist in der Geschichte der Mathematik der erste Klassifikationssatz. (Die Menge aller Objekte mit den und den Eigenschaften ist: ...)

  Der Satz stammt von Theätet und wird von Platon in seinem Buch Timaios beschrieben. Für Platon haben die Körper, ihre Form, die Tatsache, dass es genau fünf sind, usw. eine große Bedeutung.

- Zunächst ein paar Definitionen (aus L. Fejes Tóth, Reguläre Figuren, Kapitel I.4):

  „Unter einem Polygon verstehen wir ein System endlich vieler Strecken, die so angeordnet sind, daß in jedem Streckenendpunkt genau zwei Strecken zusammentreffen, mit der zusätzlichen Bedingung, daß kein Teilsystem diese Eigenschaft hat. Die Strecken werden *Seiten* und ihre Endpunkte *Ecken* genannt. Liegt das Polygon in einer Ebene, so sprechen wir von einem *ebenen Polygon*“...
  „Ein ebenes Polygon mit gleichen Seiten und gleichen Winkeln wird *regelmäßig* genannt.“...
  „Ein Polyeder ist ein endliches System von Polygonen, die im Raum so angeordnet sind, daß jede Polygonseite eine gemeinsame Seite von genau zwei Polygonen ist, mit der Einschränkung, daß kein Teilsystem diese Eigenschaft aufweist. Die Polygone, ihre Seiten und Ecken werden *Flächen, Kanten* und *Ecken* genannt.“

- Um ein *reguläres Polyeder* zu definieren, gibt es verschiedene Möglichkeiten. Man mache sich zunächst klar, dass nicht nur die platonischen Körper folgende Eigenschaften haben.
  a) Die Seitenflächen sind regelmäßige n-Ecke
  b) Die Seitenflächen sind untereinander gleich (d.h. kongruent).

  Ein doppelter Tetraeder, also eine Doppelpyramide mit dreieckiger Grundfläche, erfüllt diese Bedingungen auch, soll aber ausgeschlossen werden. Außerdem will man sternförmige Polyeder auschließen. Ab jetzt sei ein Polyeder also als konvex vorausgesetzt.

Man benötigt also eine weitere Eigenschaft, um die platonischen Körper zu charakterisieren. Eine Möglichkeit ist, dass man eine „Umkugel“ fordert, d.h. dass alle Ecken auf einer Kugel liegen.

Meistens verwendet man aber folgende Eigenschaft: Auch die sogenannten Eckenfiguren müssen regelmäßige Polygone sein. Die Eckenfiguren sind anschaulich die Polygone, die man erhält, wenn man an einer Ecke die Spitze wegschneidet. Eine formale Definition:
„Die *Eckenfigur eines Polygons* in der Ecke A ist die Strecke, die die Mittelpunkte der von A ausgehenden beiden Seiten verbindet. Die *Eckenfigur eines Polyeders* in der Ecke A ist dasjenige Polygon, dessen Seiten die Eckenfiguren der in A zusammentreffenden Polyederflächen sind. Im allgemeinen ist das ein räumliches Polygon.

Wir nennen nun ein Polyeder *regelmäßig*, wenn seine Flächen und Eckenfiguren regelmäßig sind.“

Aus dieser Definition folgt dann die Kongruenz der Flächen und Eckenfiguren!

- Um sicherzugehen, dass man alle regulären Polyeder aufzählt, geht man folgendermaßen vor. (Vgl. Platons Timaios.) Die Flächen bestehen aus kongruenten n-Ecken. (Jeder hat schon mal einen Würfel gebastelt. Das folgende ist analog.) Man legt drei gleichseitige Dreiecke nebeneinander. Diese kann man (auf genau eine Weise!) zu einem räumlichen Winkel hochklappen. Es entsteht das **Tetraeder**. Analog erhält man aus vier Dreiecken das **Oktaeder** und aus fünf Dreiecken das **Ikosaeder**. Bei letzterem ist sicher nicht so ganz klar, ob aus der Existenz der gebastelten Ecke auch beim Weiterbasteln alles gut geht. Wir werden aber das Ikosaeder explizit konstruieren. Sechs Dreiecke benötigen in der Ebene 360^0, können also nicht in den Raum geklappt werden. Bei Vierecken kann man aus drei Vierecken den **Würfel** erhalten, vier Vierecke bedecken wieder die Ebene. Aus drei Fünfecken erhält man das **Dodokaeder**. Vier Fünfecke, drei Sechsecke, drei Siebenecke usw. kommen nicht in Frage, weil die Winkel sich bereits in der Ebene zu mindestens 360^0 addieren.

- Wir zählen für diese fünf Körper die Anzahl der Ecken, Kanten und Flächen.

	Ecken	Kanten	Flächen
Tetraeder	4	6	4
Würfel	8	12	6
Oktaeder	6	12	8
Ikosaeder	12	30	20
Dodokaeder	20	30	12

Die entstehende Symmetrie ist kein Zufall. Verbindet man z.B. die Mittelpunkte der Würfelflächen, so erhält man ein Oktaeder und umgekehrt. Würfel und Oktaeder sind *dual* zueinander. Die Flächen gehen in Ecken, die Ecken in Flächen über, und Kanten werden erneut Kanten.

Ebenso sind Ikosaeder und Dodokaeder dual zueinander. Das Tetraeder ist dual zu sich selber.

- Wir beweisen die Existenz des Ikosaeders. Daraus folgt auch die Existenz des Dodokaeders.
- Betrachtet man reguläre Polytope in allgemeiner Dimension, so hat man in Dimension 4 noch einige weitere interessante Exemplare. In allen Dimensionen $n \geq 5$ gibt es aber nur die „trivialen“: Simplex (analog zum Tetraeder), n-dimensionaler Würfel und das daraus durch Dualität analog zum Oktaeder entstehende sogenannte Kreuzpolytop.
- Betrachtet man alle Drehungen im Raum, die das Tetraeder in sich selbst abbilden. Das Drehzentrum ist offensichtlich im Mittelpunkt (Schwerpunkt). Hält man eine Ecke fest, kann man das gegenüberliegende Dreieck durch Drehungen um 120^0 in sich selber abbilden. Andererseits kann man jede der vier Ecken auf jede andere Ecke abbilden. Das ergibt 12 Drehungen. Die Struktur der endlichen Drehgruppe ist isomorph zur alternierenden Gruppe A_4 mit 12 Elementen.
  Analog für den Würfel: Man kann jede Ecke auf jede der 8 Ecken drehen und hat dann noch (unter Festhalten dieser Ecke) drei verschiedene Möglichkeiten. Das ergibt 24 Elemente. Eine andere Möglichkeit, sich dies zu überlegen: Man kann jede Seite auf 6 verschiedene Seiten drehen und dann hat man noch 4 Möglichkeiten. Oder: Man kann jede der 12 Kanten auf jede andere abbilden, hat dann noch 2 Möglichkeiten. Wie man auch zählt, man erhält 24 verschiedene Drehungen. (Gruppentheoretisch steckt der sogenannte Bahnensatz hinter diesen Überlegungen). Die Gruppe ist isomorph zur symmetrischen Gruppe S_4. Welche 4 Elemente werden hier permutiert? Die Diagonalen!

  Wegen der Dualität ist dies für den Oktaeder genauso.

  Für das Dodokaeder ergibt sich: Man kann jede Fläche auf 12 Flächen abbilden und diese dann auf fünf Weisen drehen, Dies ergibt 60 Elemente. Wie oben kann man auch bezüglich der Ecken bzw. Kanten zählen. Wegen der Dualität ist dies für das Ikosaeder analog.

  Die Gruppe der 60 Drehungen ist isomorph zur Gruppe A_5. Die permutierenden Elemente sind 5 Würfel, die man in das Dodokaeder einzeichnen kann.

  Wir bestimmen die Anzahl der verschiedenen Drehungen:
  Es gibt 6 Drehachsen, die durch die Mittelpunkte gegenüberliegender Flachen gehen. Also gibt es 2 mal 6 Drehungen um 72^0 und 2 mal 6 Drehungen um 144^0.
  Es gibt 15 Drehachsen durch gegenüberliegende Kanten. Also gibt es 15 Drehungen um 180^0.
  Es gibt 10 Drehachsen durch gegenüberliegende Ecken. Also gibt es 20 Drehungen um 120^0.
  Und es gibt die Identität als Drehung. Ergibt zusammen 60 Drehungen.

Wir haben eben etwas über das Dodokaeder gelernt, indem wir die Symmetriegruppe betrachtet haben. Felix Klein forderte in seinem Erlangener Programm, dass man allgemein ein Objekt untersuchen sollte, indem man die Transformationen untersucht, die das Objekt invariant lassen. (Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen, Antrittsvorlesung, Erlangen, 1872).

Weitere Literatur:
Felix Klein, Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichung vom fünften Grade, Leipzig 1884.
Storch, U., Wiebe, H., Lehrbuch der Mathematik, Band II, Lineare Algebra, Bibliographisches Institut (Mannheim, Zürich).

- Die Klassifikation aller endlichen Untergruppen der Gruppe $SO(3,\mathbb{R})$, also aller Drehungen um den Ursprung im dreidimensionalen Raum, haben viel mit dem oben beschriebenen zu tun: Haben alle Drehungen eine gemeinsame Drehachse, so hat man letztlich ein ebenes Problem. Da die Gesamtgruppe endlich viele (sagen wir n) Elemente enthalten soll, handelt es sich um Drehungen eines regulären n-Eckes. Zu den offensichtlichn Drehungen um Vielfache von $\dfrac{360^0}{n}$ kommen im Raum aber noch die Drehungen dazu, die zusätzlich die Ober- und Unterseite des n-Ecks austauschen. Es handelt sich also um zyklische Gruppen bzw. Diedergruppen der Ordnung n.

  Gibt es aber verschiedene Drehachsen, erzwingt die Endlichkeitsbedingung, daß es sich um Gruppen handelt, die isomorph zur A_4, S_4 oder A_5 sind. (Ein Punkt wird also genau auf die Punkte abgebildet, wo auch die anderen Punkte der platonischen Körper liegen.)

  Literatur hierzu: das Buch von Neumann et. al. Groups and Geometry, siehe oben.