TU CLAUSTHAL
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. W. Klotz

Lineare Algebra II
SS 2000
Klausur
28.06.2000

Name, Vorname	Matr.nummer	Fachrichtung	Fachsemester	Tutor

Ich bin damit einverstanden, dass mein Klausurergebnis ausgehängt wird.
◯ Ja ◯ Nein

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	$\sum$	Note
Max. Punkte	4	5	5	8	4	5		
bearbeitet ? bitte ankreuzen!								
erreichte Punkte								

Es wird nicht nur das Ergebnis, sondern insbesondere auch der Rechenweg bewertet. Begründen Sie Ihre Schritte ausreichend.
Wenn Sie bei einer Aufgabe nicht weiterkommen, z.B. weil bereits ein Rechenfehler vorliegt, beschreiben Sie bitte möglichst genau das prinzipielle Vorgehen, mit dem Sie die Aufgabe angehen wollten.

Viel Erfolg!

1. Es seien $P_1 = (5,0,0)$ und $P_2 = (0,0,c) \in \mathbb{R}^3$. Die Kugel $K \subseteq \mathbb{R}^3$ habe die Gleichung
$$x^2 + y^2 + z^2 = 16.$$
Wie muss $c > 0$ gewählt werden, damit die Gerade g durch P_1 und P_2 die Kugel K berührt?

2. Gegeben sei
$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2\sqrt{3} \\ 3 & -2 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 2\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}.$$
   a) Zeigen Sie, dass A eine orthogonale Matrix ist.
   b) Zeigen Sie: Die zu A gehörende Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ist eine Drehung.
   c) Geben Sie Drehachse und (ungefähren!) Drehwinkel mit Drehrichtung an. Siehe Tabelle von Cosinus-werten am Ende des Aufgabenblattes.

3. Die Quadrik $Q \subseteq \mathbb{R}^3$ habe die Gleichung
$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xz + 2(x - y + z) + 1 = 0.$$
   a) Bestimmen Sie den Typ von Q.
   b) Geben Sie ein kartesisches Koordinatensystem $(\vec{x_0}, B)$ an, so dass die Gleichung von Q Normalform bekommt.
   c) Falls es eine Gerade $g \subseteq Q$ gibt, gebe man die Gleichung einer solchen Geraden an.

4. Es sei

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ -4 & 7 & 4 \\ 8 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) (2 Punkte) Man untersuche, ob die obigen Matrizen A_i über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar sind.

b) (4 Punkte) Im Falle der Diagonalisierbarkeit gebe man eine Diagonalmatrix D_i und eine reguläre Matrix $S_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$ an mit $S_i^{-1}A_iS_i = D_i$.

c) (2 Punkte) Bestimmen Sie zu den Matrizen jeweils das Minimalpolynom.

5. Man zerlege die folgenden Polynome über $\mathbb{Z}$ in irreduzible Faktoren bzw. begründe, warum sie irreduzibel sind.

   a) $f(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$,
   b) $f(x) = x^4 + 2x^2 + 9$,
   c) $f(x) = x^{1000} + 111$.

6. a) Es sei $T \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ eine obere Dreiecksmatrix mit Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Zeigen Sie (ohne Anwendung des Satzes von Cayley-Hamilton), dass

$$(T - \lambda_1 I)(T - \lambda_2 I)(T - \lambda_3 I) = \mathbf{0},$$

   wobei $I \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ die Einheitsmatrix und $\mathbf{0}$ die Nullmatrix sei.

   b) Folgern Sie hieraus für alle Matrizen $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ den Satz von Cayley-Hamilton.

Tabelle von Cosinuswerten

Winkel in Grad	(abgeschnittener) Cosinus-wert	Winkel	Cosinus-wert	Winkel	Cosinus-wert	Winkel	Cosinus-wert
5	0.996	95	−0.087	185	−0.996	275	0.087
10	0.984	100	−0.173	190	−0.984	280	0.173
15	0.965	105	−0.258	195	−0.965	285	0.258
20	0.939	110	−0.342	200	−0.939	290	0.342
25	0.906	115	−0.422	205	−0.906	295	0.422
30	0.866	120	−0.5	210	−0.866	300	0.5
35	0.819	125	−0.573	215	−0.819	305	0.573
40	0.766	130	−0.642	220	−0.766	310	0.642
45	0.707	135	−0.707	225	−0.707	315	0.707
50	0.642	140	−0.766	230	−0.642	320	0.766
55	0.573	145	−0.819	235	−0.573	325	0.819
60	0.5	150	−0.866	240	−0.5	330	0.866
65	0.422	155	−0.906	245	−0.422	335	0.906
70	0.342	160	−0.939	250	−0.342	340	0.939
75	0.258	165	−0.965	255	−0.258	345	0.965
80	0.173	170	−0.984	260	−0.173	350	0.984
85	0.087	175	−0.996	265	−0.087	355	0.996
90	0	180	−1	270	0	360	1

Hinweis:

Am 11. September 10.00-12.00 wird eine Wiederholungsklausur zur LA I *und* II geschrieben. Studenten, die laut Prüfungsordnung im Vordiplom nur über LA I geprüft werden (z.B. Physikalische Technologie), wird die Gelegenheit geboten, den LA I Schein zu erwerben. Studenten mathematischer Studiengänge werden über LA I und LA II geprüft.