1. Es sei $V = \mathbb{R}_n[x]$. Der Endomorphismus φ sei definiert durch

$$\varphi(f(x)) = f(x+1).$$

Ist φ diagonalisierbar?

2. Es sei V der in $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ von den Funktionen

$$x^0, \quad \sin x, \quad \cos x$$

aufgespannte Unterraum. V werde ausgestattet mit dem Skalarprodukt

$$\beta(f,g) = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx.$$

Die Abbildung $\varphi_\alpha : V \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ sei definiert durch

$$\varphi_\alpha(f(x)) \;=\; f(x+\alpha).$$

a) Man zeige, dass φ_α ein normaler Endomorphismus von V ist.

b) Man beschreibe die komplexe Erweiterung $\hat{V}$ und die komplexen Fortsetzungen $\hat{\beta}$ und $\hat{\varphi}_\alpha$.

c) Bestimmen Sie eine ONB aus lauter Eigenvektoren von $\hat{\varphi}_\alpha$.

3. Es seien V ein reeller Vektorraum, $\varphi \in \mathrm{Hom}\, V$, $\hat{V}$ die komplexe Erweiterung von V und $\hat{\varphi}$ die komplexe Fortsetzung von φ. Man zeige:

a) Ist U ein φ-invarianter Unterraum von V, dann ist $\hat{U}$ ein $\hat{\varphi}$-invarianter Unterraum von $\hat{V}$.

b) Sei U' ein Unterraum von $\hat{V}$. Gibt es dann einen Unterraum $U \subseteq V$ mit $U' = \hat{U}$?