TU CLAUSTHAL
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. W. Klotz

Lineare Algebra II
SS 2000
Tutorenübung 7

1. Es sei
$$\mathbb{R}_s^{n\times n} = \{A | A \in \mathbb{R}^{n\times n},\ A^T = -A\}.$$
der Raum der schiefsymmetrischen, reellen $n \times n$-Matrizen.
Für $A \in \mathbb{R}_s^{n\times n}$ zeige man:

   a) Alle Eigenwerte von A haben die Form $i\beta$ mit $\beta \in \mathbb{R}$.
   b) $A - E,\ A + E$ sind invertierbar.
   c) $(E - A)\ (E + A)^{-1} = (E + A)^{-1}(E - A)$.
   d) $(E + A)\ (E - A)^{-1} = B$ ist orthogonal.
   e) $\det\ (B) = 1$.
   f) $E + B$ ist invertierbar.
   g) Die Abbildung $F : \mathbb{R}_s^{n\times n} \to SO(n)$ mit $F(A) = (E + A)\ (E - A)^{-1}$ ist injektiv, und Bild F besteht genau aus den Matrizen $B \in SO(n)$, für die $E + B$ invertierbar ist.

2. Es sei φ die Drehung des Raumes $\mathbb{R}_3$ mit der Drehachse $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$ und dem Drehwinkel $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$. Dabei soll die Drehung so erfolgen, dass bei Fortschreiten in Richtung $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine Rechtsschraube entsteht.
Man bestimme die Matrix $M(\varphi, B_s)$ bzgl. der Standardbasis B_s.

3. Man zeige, dass die folgende Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ orthogonal ist.
$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Man bestimme die reelle bzw. komplexe Normalform A_1 bzw. A_2 von A. Ferner gebe man eine orthogonale Matrix $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ an mit $A_1 = S^{-1}AS$.