Die platonischen (regulären) Polyeder

- Die Aufzählung der fünf platonischen Körper ist in der Geschichte der Mathematik der erste Klassifikationssatz. (Die Menge aller Objekte mit den und den Eigenschaften ist: ...)

  Der Satz stammt von Theätet und wird von Platon in seinem Buch Timaios beschrieben. Für Platon haben die Körper, ihre Form, die Tatsache, dass es genau fünf sind, usw. eine große Bedeutung.

- Zunächst ein paar Definitionen (aus L. Fejes Tóth, Reguläre Figuren, Kapitel I.4):

  „Unter einem Polygon verstehen wir ein System endlich vieler Strecken, die so angeordnet sind, daß in jedem Streckenendpunkt genau zwei Strecken zusammentreffen, mit der zusätzlichen Bedingung, daß kein Teilsystem diese Eigenschaft hat. Die Strecken werden *Seiten* und ihre Endpunkte *Ecken* genannt. Liegt das Polygon in einer Ebene, so sprechen wir von einem *ebenen Polygon*"...
  „Ein ebenes Polygon mit gleichen Seiten und gleichen Winkeln wird *regelmäßig* genannt."...
  „Ein Polyeder ist ein endliches System von Polygonen, die im Raum so angeordnet sind, daß jede Polygonseite eine gemeinsame Seite von genau zwei Polygonen ist, mit der Einschränkung, daß kein Teilsystem diese Eigenschaft aufweist. Die Polygone, ihre Seiten und Ecken werden *Flächen, Kanten* und *Ecken* genannt."

- Um ein *reguläres Polyeder* zu definieren, gibt es verschiedene Möglichkeiten. Man mache sich zunächst klar, dass nicht nur die platonischen Körper folgende Eigenschaften haben.
  a) Die Seitenflächen sind regelmäßige n-Ecke
  b) Die Seitenflächen sind untereinander gleich (d.h. kongruent).

  Ein doppelter Tetraeder, also eine Doppelpyramide mit dreieckiger Grundfläche, erfüllt diese Bedingungen auch, soll aber ausgeschlossen werden. Außerdem will man sternförmige Polyeder auschließen. Ab jetzt sei ein Polyeder also als konvex vorausgesetzt.

  Man benötigt also eine weitere Eigenschaft, um die platonischen Körper zu charakterisieren. Eine Möglichkeit ist, dass man eine „Umkugel" fordert, d.h. dass alle Ecken auf einer Kugel liegen.

  Meistens verwendet man aber folgende Eigenschaft: Auch die sogenannten Eckenfiguren müssen regelmäßige Polygone sein. Die Eckenfiguren sind anschaulich die Polygone, die man erhält, wenn man an einer Ecke die Spitze wegschneidet. Eine formale Definition:
  „Die *Eckenfigur eines Polygons* in der Ecke A ist die Strecke, die die Mittelpunkte der von A ausgehenden beiden Seiten verbindet. Die *Eckenfigur eines Polyeders* in der Ecke A ist dasjenige Polygon, dessen Seiten die Eckenfiguren

der in A zusammentreffenden Polyederflächen sind. Im allgemeinen ist das ein räumliches Polygon.

Wir nennen nun ein Polyeder *regelmäßig*, wenn seine Flächen und Eckenfiguren regelmäßig sind."

Aus dieser Definition folgt dann die Kongruenz der Flächen und Eckenfiguren!

- Um sicherzugehen, dass man alle regulären Polyeder aufzählt, geht man folgendermaßen vor. (Vgl. Platons Timaios.) Die Flächen bestehen aus kongruenten n-Ecken. (Jeder hat schon mal einen Würfel gebastelt. Das folgende ist analog.) Man legt drei gleichseitige Dreiecke nebeneinander. Diese kann man (auf genau eine Weise!) zu einem räumlichen Winkel hochklappen. Es entsteht das **Tetraeder**. Analog erhält man aus vier Dreiecken das **Oktaeder** und aus fünf Dreiecken das **Ikosaeder**. Bei letzterem ist sicher nicht so ganz klar, ob aus der Existenz der gebastelten Ecke auch beim Weiterbasteln alles gut geht. Wir werden aber das Ikosaeder explizit konstruieren. Sechs Dreiecke benötigen in der Ebene 360^0, können also nicht in den Raum geklappt werden. Bei Vierecken kann man aus drei Vierecken den **Würfel** erhalten, vier Vierecke bedecken wieder die Ebene. Aus drei Fünfecken erhält man das **Dodokaeder**. Vier Fünfecke, drei Sechsecke, drei Siebenecke usw. kommen nicht in Frage, weil die Winkel sich bereits in der Ebene zu mindestens 360^0 addieren.

- Wir zählen für diese fünf Körper die Anzahl der Ecken, Kanten und Flächen.

	Ecken	Kanten	Flächen
Tetraeder	4	6	4
Würfel	8	12	6
Oktaeder	6	12	8
Ikosaeder	12	30	20
Dodokaeder	20	30	12

  Die entstehende Symmetrie ist kein Zufall. Verbindet man z.B. die Mittelpunkte der Würfelflächen, so erhält man ein Oktaeder und umgekehrt. Würfel und Oktaeder sind *dual* zueinander. Die Flächen gehen in Ecken, die Ecken in Flächen über, und Kanten werden erneut Kanten.

  Ebenso sind Ikosaeder und Dodokaeder dual zueinander. Das Tetraeder ist dual zu sich selber.

- Wir beweisen die Existenz des Ikosaeders. Daraus folgt auch die Existenz des Dodokaeders.

- Betrachtet man reguläre Polytope in allgemeiner Dimension, so hat man in Dimension 4 noch einige weitere interessante Exemplare. In allen Dimensionen $n \geq 5$ gibt es aber nur die „trivialen": Simplex (analog zum Tetraeder), n-dimensionaler Würfel und das daraus durch Dualität analog zum Oktaeder entstehende sogenannte Kreuzpolytop.