TU CLAUSTHAL
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. W. Klotz

Lineare Algebra II
SS 2000
Übungsblatt 4

1. Es sei
$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1-i & 0 & 1-i \\ -1-i & 0 & 1-i & 0 \\ 0 & 1-i & 0 & -1-i \\ 1-i & 0 & -1-i & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 4}.$$
Man bestimme die Eigenwerte von A, A^2, A^3, A^4 und die Matrix A^4.

2. Sei
$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$
Ist A diagonalisierbar? Wenn ja, gebe man eine invertierbare Matrix S und eine Diagonalmatrix D an, so dass $D = S^{-1}AS$ gilt.

3. Man beweise den Satz von Schur: Jede komplexe $n \times n$-Matrix A ist orthogonal ähnlich zu einer oberen Dreiecksmatrix R, d.h. es gibt eine orthogonale Matrix S mit $S^{-1}AS = R$.

4. Es sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, $f \in \mathbb{K}[x]$. Die Matrix A habe die Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$. Man beweise:

   a) $A\vec{x} = \lambda\vec{x} \Longrightarrow f(A)\vec{x} = f(\lambda)\vec{x}$, d.h. $f(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_r)$ sind Eigenwerte von $f(A)$.
   b) Ist A zu einer Dreiecksmatrix ähnlich, dann hat $f(A)$ nur die in a) angegebenen Eigenwerte.

5. Es sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Man beweise:

   a) $\big(A \neq \pm\, E \wedge A^2 = E\big) \Longrightarrow A$ ist ähnlich zu $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$,

   b) $A^2 = -E \Longrightarrow A$ ist ähnlich zu $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.