TU CLAUSTHAL
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. W. Klotz

Wiederholungsklausur zur
Linearen Algebra I und II
SS 2000
11.09.2000

Aufgabe 1)[1+1+1 Punkte]

a) Was versteht man unter der Charakteristik einen Körpers?

b) Ist die Menge aller invertierbaren 3×3 Matrizen über $\mathbb{R}$ ein Vektorraum?

c) Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_{11}$ der Körper mit 11 Elementen. Geben Sie ein nichtkonstantes Polynom $f \in \mathbb{K}[x]$ an, das keine Nullstelle in $\mathbb{K}$ hat.

Aufgabe 2)[3+1+2 Punkte] Es sei $a \in \mathbb{N}$. Weiter sei

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{N}^3 \text{ mit } a = x^2 + 2yz \text{ und } x/2 < y < x + z/2\}.$$

Sei $f : B \to B$ mit $(x, y, z) \mapsto (2y - x, y, z + 2x - 2y)$.

a) Zeigen Sie, dass es sich dabei um eine wohldefinierte Abbildung handelt.

b) Stellen Sie die Matrix von f bezüglich der Standardbasis dar.

c) Berechnen Sie die Matrix von f^{-1} bezüglich der Standardbasis.

Aufgabe 3)[4 Punkte] Es sei

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & & & & \\ 1 & 1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & 1 & & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & & 1 & 1 & 1 \\ & & & & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots .$$

Durch Entwicklung zeige man $D_{n+2} = D_{n+1} - D_n$ und folgere daraus $D_n = D_{n+6}$. Für welche n gilt $D_n = 0$?

Aufgabe 4)[4 Punkte] Es sei q die kleinste ganze Zahl, so dass die Matrix

$$A_q = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & q \end{pmatrix}$$

positiv definit ist.

a) Bestimmen Sie q.

b) Es sei β das durch die Matrix A_q bezüglich der Standardbasis gegebene Skalarprodukt. Man bestimme die Länge des Vektors $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ bezüglich β.

Aufgabe 5)[4 Punkte] Der Raum $\mathbb{R}_2[x]$, d.h. der Raum der reellen Polynome bis zum Grad 2, werde ausgestattet mit dem Skalarprodukt

$$\beta(f,g) = f \circ g = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx.$$

Bestimmen Sie die orthogonale Projektion $\psi(x)$ des Polynoms $\varphi(x) = x^2$ auf den Unterraum $\mathbb{R}_1[x]$.

Aufgabe 6)[2+2 Punkte] Es seien $P_0 = (0,0,0), P_1 = (1,0,0), P_2 = (0,1,0), P_3 = (0,0,1)$ vier Punkte des $\mathbb{R}^3$.

a) Bestimmen Sie den Abstand d des Punktes P_0 von der Ebene durch die Punkte P_1, P_2 und P_3.

b) Bestimmen Sie den Radius r der Kugel durch P_0, P_1, P_2 und P_3.

Aufgabe 7)[4 Punkte] Für welche Zahlen $p \in \mathbb{R}$ ist die Matrix

$$A_p = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ p & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar?
(Hinweis: Zeigen Sie, dass $\lambda = 2$ ein Eigenwert ist.)

Aufgabe 8)[3 Punkte] Es sei N eine normale Matrix und U eine unitäre Matrix mit $N, U \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Folgern Sie, dass auch $U^{-1}\,N\,U$ eine normale Matrix ist.

Aufgabe 9)[3 Punkte] Bestimmen Sie den Typ der folgenden Quadrik im $\mathbb{R}^3$. (Die genaue Lage muss nicht bestimmt werden.) $z = \dfrac{1}{x+y}$.

Aufgabe 10)[5 Punkte] Es sei f eine Drehung des $\mathbb{R}^3$ um 45°. Die Drehachse gehe durch den Ursprung und habe die Richtung $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Die Drehung erfolge so, dass bei Fortschreiten in Richtung der Drehachse eine Rechtsschraube entsteht.

Bestimmen Sie die Matrix von f bezüglich der Standardbasis B_S.

Hinweis: $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2}$.

Aufgabe 11)[2+2+2 Punkte] Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

Man bestimme

a) das charakteristische Polynom χ_A.

b) das Minimalpolynom m_A (man beachte $m_A | \chi_A$).

c) eine Jordansche Normalform von A.