(H1a) Differenzieren Sie

$$f(x) = x^{\ln\sqrt{x^2+1}} \quad (x > 0),$$

$x = e^{\ln x}$ für $x > 0$.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{\ln\sqrt{x^2+1}} \\ &= e^{\frac{1}{2}\ln x \ln(x^2+1)}. \end{aligned}$$

Kettenregel:

$$\begin{aligned} f'(x) &= f(x)\left(\frac{1}{2}\ln x \ln(x^2+1)\right)' \\ &= f(x)\left(\frac{1}{2x}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\ln x\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)\right) \\ &= f(x)\left(\frac{\ln\sqrt{(x^2+1)}}{x} + \frac{x\ln x}{x^2+1}\right). \end{aligned}$$

bei der inneren Abl.: Produktregel

bei $\ln(x^2+1)'$: Kettenregel

(H1b)

$$f(x) = \frac{2}{1+\cos 2x} - \tan^2 x \ \left(|x| < \frac{\pi}{2}\right).$$

Es gilt:

$$\begin{array}{lccc} (1) & 1-\sin^2 x & = & \cos^2 x \\ (2) & \cos 2x & = & \cos^2 x - \sin^2 x \\ (3) & \tan^2 x & = & \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}. \end{array}$$

$\Rightarrow f(x) = \ldots = 1$, und $f'(x) = 0$.

(H2) Geben Sie die Taylorreihe von $f(x) = e^x \cos x$ an der Stelle π an. Wo wird die Funktion durch ihre Taylorreihe dargestellt ?

$$\begin{aligned}
f(x) &= e^x \cos x \\
f'(x) &= e^x \cos x - e^x \sin x \\
f''(x) &= -2e^x \sin x \\
f'''(x) &= -2(e^x \sin x) - 2(e^x \cos x) \\
f^{(iv)}(x) &= -4e^x \cos x \\
\text{also } f^{(iv)}(x) &= -4f(x).
\end{aligned}$$

Vier mal ableiten erzeugt Faktor -4.

Allgemein und (π einsetzen):

$$\begin{aligned}
f^{(4k+0)}(\pi) &= (-1)^{k+1}4^k e^\pi \\
f^{(4k+1)}(\pi) &= (-1)^{k+1}4^k e^\pi \\
f^{(4k+2)}(\pi) &= 0 \\
f^{(4k+3)}(\pi) &= (-4)^k 2\, e^\pi.
\end{aligned}$$

Taylorreihe der Funktion:

$$f(x) \ = \ \sum_{k=0}^{\infty}\left((-1)^{k+1}4^k + \frac{(-4)^{k+1}(x-\pi)}{(4k+1)}\right.$$
$$\left. +0 \ + \ \frac{(-4)^k \cdot 2(x-\pi)^3}{(4k+1)(4k+2)(4k+3)}\right)$$
$$\times \frac{e^\pi (x-\pi)^{4k}}{(4k)!}.$$

$$f(x) = -e^\pi - e^\pi(x-\pi) + \tfrac{1}{3}e^\pi(x-\pi)^3 + \tfrac{e^\pi}{6}(x-\pi)^4 + \tfrac{e^\pi}{30}(x-\pi)^5 + \dots \ .$$

f wird durch die Taylorreihe auf ganz $\mathbb{R}$ dargestellt, denn der Fehler nach der Summation bis zum Grad $4k+3$ ist

$$|R| \leq \left|\frac{e^\pi 4^{k+1}(x-\pi)^{4k+4}}{(4k)!}\right|.$$

Für jedes feste x wächst der Nenner schneller als der Zähler. Somit gilt:

$$\lim_{k\to\infty} |R| = 0.$$

Differentialgleichungen

$$y'' - 5y' + 6y = e^{-2x}.$$

Schritt 1:

Homogene Dgl $y'' - 5y' + 6y = 0$ lösen.

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3.$$

Keine doppelte Nullstelle.

Fundamentalsystem:

$y_1(x) = e^{2x}, \quad y_2(x) = e^{3x}.$

Allgemeine Lösung der homogenen Dgl:

$$y_{\text{hom}} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}, C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Schritt 2:

Es liegt keine Resonanz vor, da -2 keine Nullstelle des Begleitpolynoms.

Ansatz für eine **spezielle** Lösung vom Typ der rechten Seite.

$y_S = Ae^{-2x}$ ergibt $A = \frac{1}{20}$.

Schritt 3:

Allgemeine Lösung:

$$\begin{aligned} y(x) &= y_S + y_{\text{hom}} \\ &= \frac{1}{20}e^{-2x} + C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}, \\ &\quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$$y''' - y'' + y' - y = 2x + 1.$$

Schritt 1:

Homogene Dgl $y''' - y'' + y' - y = 0$ lösen.

$\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = i, \lambda_3 = -i.$

Keine doppelte Nullstelle

Komplexes Fundamentalsystem:

$y_1(x) = e^x,\ y_2(x) = e^{ix},\ y_3(x) = e^{-ix}.$

Reelles Fundamentalsystem:

$y_1(x) = e^x,\ y_2(x) = \sin x, y_3(x) = \cos x.$

Allgemeine **relle** Lösung der homogenen Dgl:

$$y_{\text{hom}} = C_1 e^x + C_2 \sin x + C_3 \cos x$$

$$C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

Schritt 2:

Es liegt keine Resonanz vor, da die rechte Seite $2x+1$ nichts mit den Basislösungen gemeinsam hat.

Ansatz für eine **spezielle** Lösung vom Typ der rechten Seite.

$y_S = A_1 x + A_0 \Rightarrow A_1 = -2, A_0 = -3.$

Schritt 3:

Allgemeine Lösung:

$$\begin{aligned} y(x) &= y_S + y_{\text{hom}} \\ &= -2x - 3 \\ &\quad +C_1 e^x + C_2 \sin x + C_3 \cos x, \\ &\quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Gibt man 3 Zusatzbedingungen vor, z.B. $y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 0$ **(Anfangswertproblem)**, so erhält man eine eindeutige Lösung mit

$$C_1 = \frac{3}{2}, C_2 = \frac{1}{2}, C_3 = \frac{3}{2}.$$

Analog gibt es **Randwertprobleme**, bei denen die Zusatzbedingungen z.B. am Anfang und Ende eines Intervalls liegen.

Integralrechnung

$$\int \ln x \, dx$$

$$\int \sinh^2 x \, dx$$

Part. Integration: $u = \sinh x, v' = \sinh x$,
also $u' = \cosh x$ und $v = \cosh x$. Also

$$\begin{aligned}
\int \sinh^2 x \, dx &= \sinh x \cosh x - \int \cosh^2 x \, dx \\
&\quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \\
&= \sinh x \cosh x \\
&\quad - \int (1 + \sinh^2 x) \, dx \\
2 \int \sinh^2 x \, dx &= \sinh x \cosh x - x
\end{aligned}$$

$$\int_{-1}^{2} \sqrt{|\,1-x|x|\,|}\,dx.$$

$$\int_{1}^{2} \sqrt{x^2-1}\,dx.$$

$x = \cosh u, u = \mathrm{Arcosh} x, dx = \sinh u\,du.$

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{x^2-1}\,dx &= \int \sinh u^2\,du \\
&= -\frac{u}{2} + \frac{\sinh u \cosh u}{2} \\
&= -\frac{\mathrm{Arcosh} x}{2} + \frac{x\sqrt{x^2-1}}{2}.
\end{aligned}$$

Daher

$$\begin{aligned}
\int_{1}^{2} \sqrt{x^2-1}\,dx &= \sqrt{3} - \frac{\mathrm{Arcosh} 2}{2} \\
\text{oder } &= \sqrt{3} - \frac{\ln(2+\sqrt{3})}{2} \approx 1,07\cdots
\end{aligned}$$