Behandelte Themen und Beispiele der 1. großen Übung

- Definition von Konvergenz bzw. Grenzwert.
- Quantorenschreibweise (für alle, es gibt)
- Veranschaulichung des Begriffes der Konvergenz (reell, komplex)
- Beispiele Beispiel 1: $a_n = a$
  Beispiel 2: $a_n = \frac{1}{n}$
  (Grenzwert $a = 0$ raten. Zum Beweis wähle ε beliebig. Kann man $N(\varepsilon)$ so angeben, so dass für alle $n \geq N(\varepsilon)$ gilt: $|a_n - 0| < \varepsilon$?)
  Beispiel 3: $a_n = (-1)^n$. Beweis, dass diese Folge keinen Grenzwert hat.
  Beispiel 4: Zu Satz 1.2 der Vorlesung:

  Sei (a_n) konvergent gegen a und sei (b_n) konvergent gegen b, so konvergiert $(a_n b_n)$ gegen ab. Mit Beweis. (Standardtricks wie Dreiecksungleichung, konvergente Folge ist beschränkt, d.h. es gibt ein K mit $|a_n| \leq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$.)

  Diskussion des Beispieles für $+, -, \cdot$ und $/$. Division nur, falls $b \neq 0$.
- Definition von Häufungspunkt. Bsp. $a_n = (-1)^n$.
- Satz von Bolzano Weierstraß: Jede **beschränkte** Folge reeller (oder komplexer) Zahlen hat mindestens einen Häufungspunkt.
  Beweisidee: Sei $-K \leq |a_n| \leq K$. d.h. in dem Intervall $[-K, K]$ liegen unendlich viele Folgenglieder. Wenn man das Intervall halbiert, liegen in mindestens einer der beiden Hälften unendlich viele Folgenglieder. Das macht man mehrfach. In mindestens einem Intervall der Länge $\frac{2K}{2^n}$ liegen unendlich viele Folgenglieder. Daher gibt es einen Punkt, der in jeder noch so kleinen ε Umgebung unendlich viele Folgenglieder hat.
- Beispiel 5
  $a_n = \frac{7n^3-3n+1}{5n^3+1}$ hat Grenzwert $\frac{7}{5}$.

$$\left|\frac{7n^3-3n+1}{5n^3+1} - \frac{7}{5}\right| = \cdots = \left|\frac{15n+2}{5(5n^3+1)}\right| \leq \frac{17n}{5(5n^3)} = \frac{17}{25n^2}.$$

(Für $n \geq 1$ gilt $15n+2 \leq 17n$ und es gilt $\frac{1}{5n^3+1} < \frac{1}{5n^3}$ usw.)
Man möchte, dass dieses kleiner als jedes positive ε wird. Aus $\frac{17}{25n^2} < \varepsilon$ bzw. $\frac{17}{25\varepsilon} < n^2$ folgt, dass dies auf jeden Fall für $n \geq N(\varepsilon) = \left[\sqrt{\frac{17}{25\varepsilon}}\right] + 1$ erfüllt ist.

Man kann also für jedes ε ein $N(\varepsilon)$ wählen, so dass für alle $n \geq N(\varepsilon)$ gilt $|a_n - \frac{7}{5}| < \varepsilon$.

Hätte man einen falschen Grenzwert geraten, hätte man nicht so schliessen können. Dann hätte sich schon der Term $35n^3$ nicht weggehoben, und man hätte

$$\left|\frac{7n^3-3n+1}{5n^3+1} - c\right| = \cdots = \left|\frac{c'n^3+\cdots}{5n^3+1}\right|$$

erhalten.
Alternativer Beweis: $a_n = \frac{7n^3-3n+1}{5n^3+1} = \frac{n^3(7-\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3})}{n^3(5+\frac{1}{n^3})} = \frac{7-\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{5+\frac{1}{n^3}}$.
Nach den Grenzwertsätzen gilt

$$\lim a_n = \lim \frac{7-\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{5+\frac{1}{n^3}} = \frac{\lim\left(7-\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right)}{\lim\left(5+\frac{1}{n^3}\right)} = \frac{\lim 7 - \lim\frac{3}{n^2} + \lim\frac{1}{n^3}}{\lim 5 + \lim\frac{1}{n^3}} = \frac{7-0+0}{5+0+0} = \frac{7}{5}.$$