Behandelte Themen und Beispiele der 2. großen Übung

- Thema Konvergenz von Reihen

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass aus der geometrischen Reihe das Quotientenkriterium und das Wurzelkriterium folgt:

- Gibt es ein festes $q < 1$, so dass für alle genügend großen n gilt: $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q < 1$?
- Gibt es ein festes $q < 1$, so dass für alle genügend großen n gilt: $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1$?

Beispiel 1: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ Man nutze z.B. $n! \geq C3^n$ aus.

Hinweis, ist eines der Kriterien anwendbar, dann (normalerweise) auch das andere, aber manchmal ist eines davon bequemer als das andere.

Beispiel 2:

Der Wurm

Ein Wurm läuft auf einem **Gummiband von 1 Meter** Länge. Er legt in einer Minute **einen Zentimeter** zurück. Nach dieser Minute wird das Gummiband um **einen Meter** verlängert, wobei der Wurm seine relative Lage (1% des Weges ist bereits zurückgelegt) behält.

Der Wurm ist dann also 2 cm vom Start, aber 198 cm vom Ziel entfernt.

In der nächsten Minute läuft der Wurm wieder einen Zentimeter und anschließend wird das Band wieder um einen Meter gestreckt.

Wird der Wurm jemals sein Ziel erreichen?

(Wenn ja, wann? Wenn nein, warum nicht?)

Im ersten Schritt bewältigt der Wurm ein Hunderstel des Weges. Im zweiten Schritt ist sein 1cm nur noch ein Zweihunderstel des Weges. Im dritten Schritt ein Dreihunderstel usw.

Man rechnet also für k Zeitschritte:

$$\frac{1}{100} + \frac{1}{200} + \frac{1}{300} + \cdots \frac{1}{100k} = \frac{1}{100} \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n} \overset{!?}{\geq} 1.$$

Das Thema ist also die harmonische Reihe. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass diese wegen

$$1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})+(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8})+\cdots > 1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{4}+\frac{1}{4})+(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8})+\cdots > 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots$$

gegen unendlich divergiert.

Wir wissen also, dass für $k = 2^{200} = 4^{100} < 1.61 \times 10^{60}$ diese Summe größer als 100 ist, so dass spätestens dann der Wurm an seinem Ziel ist.

Genauer folgt dies sogar schon für $k \approx e^{100-\gamma} \approx 1.5092 \times 10^{43}$. (Siehe unten.) Eine sehr genaue Analyse ergibt sogar, dass man den kleinsten Wert von k sehr genau angeben kann. Er ist $k = \lceil e^{100-\gamma} \rceil \approx 1.5092 \times 10^{43}$ oder $k = \lfloor e^{100-\gamma} \rfloor \approx 1.5092 \times 10^{43}$ mit $\gamma = 0.5772 \cdots$.

Das Gummiband hat dann die Länge von 10^{27} Lichtjahren. Die Zeit beträgt $k/(36 \times 24 \times 60) \approx 2.87 \times 10^{37}$ Jahre.

Beispiel 3: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}_+$. Wir betrachten die Fälle $\alpha = 3$, $\alpha = 2$, $\alpha = 1$ und $\alpha = \frac{3}{2}$. Hier ist weder das Quotientenkrierium noch das Wurzelkriterium anwendbar, da der Quotient bzw. die Wurzel gegen 1 konvergiert, es also kein festes $q < 1$ mit der geforderten Eigenschaft gibt.

Daher wurde in der Vorlesung $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ mit dem Majorantenkriterium behandelt.

Analog kann man für Exponenten $\alpha > 2$ behandeln:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 2.$$

Vielleicht gibt es aber die Möglichkeit, den konvergenten Fall $\alpha = 2$ und den divergenten Fall $\alpha = 1$ gemeinsam zu behandeln.

- Das Integralvergleichskriterium (Satz 8.4 des Skriptes): Es sei $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}_+$ monoton fallend. Dann gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) \text{ ist konvergent } \iff \int_0^{\infty} f(t)\,dt \text{ ist konvergent.}$$

Treppenfunktionen zeichnen und Flächen vergleichen ergibt:

$$\int_1^k \frac{1}{x}\,dx = \ln x < \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n} < 1 + \int_1^k \frac{1}{x}\,dx = 1 + \ln x.$$

Betrachtet man die kleinen Flächen als Fehler so erhält man: es gibt eine Konstante (Euler-Mascheroni-Konstante) $\gamma = 0.57721 \cdots$, so dass

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n} = \ln k + \gamma + O\left(\frac{1}{k}\right)$$

gilt. Hierbei bedeutet $O\left(\frac{1}{k}\right)$, dass es eine feste Konstante $C > 0$ gibt, so dass der Rest kleiner als $C\frac{1}{k}$ ist.

Analog folgt die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ wegen

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{3/2}}\,dx = \left[-2\frac{1}{x^{1/2}}\right]_1^{\infty} = (0 - (-2)) = 2.$$

Allgemein gilt: Die Summe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ (mit $\alpha \in \mathbb{R}_+$) ist konvergent für $\alpha > 1$, aber divergent für $\alpha \leq 1$. Die harmonische Reihe ist der Grenzfall mit $\alpha = 1$. (Die harmonische Reihe divergiert auch viel langsamer, als z.B. die Reihe für $\alpha = \frac{1}{2}$.)