Behandelte Themen und Beispiele der großen Übung der 4. Woche (3. Woche wegen 1. Mai ausgefallen)

- **Thema: Bedingt konvergente Reihen.**
Konvergente Reihen darf man Umklammern, $(a+b)+c = a+(b+c)$, aber im allgemeinen nicht Umordnen. Ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent, d.h. konvergiert sogar $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, so darf man umsortieren, sonst nicht. Es ist sogar möglich, durch Umsortieren jeden möglichen Wert zu erreichen, (Riemannscher Umordnungssatz). Das behandeln wir nicht im Detail aber betrachten zwei konkrete Beispiele.

Beispiel 1:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = S.$$

Die Konvergenz der Reihe folgt aus dem Leibnizkriterium, (alternierende und monoton fallende Nullfolge als Folgenglieder).

Wir betrachten die folgende Umsortierung (zwei positive, ein negativer Summand) und berechnen die Summe:

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} \pm \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4k-3} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{2k} \right).$$

Da man Klammern setzen darf:

$$\begin{array}{rcll} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right) & = & \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4k-3} - \frac{1}{4k-2} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{4k}\right) & = S \\ \text{mal zwei nehmen} & & \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}\right) & = \frac{S}{2} \\ \text{addieren} & \Rightarrow & \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4k-3} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{2k}\right) & = \frac{3}{2} S. \end{array}$$

Daher die Warnung: BEDINGT KONVERGENTE REIHEN NICHT UMSORTIEREN.

Beispiel 2:

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} \pm \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}.$$

Die Konvergenz der Reihe folgt wie oben aus dem Leibnizkriterium.

Wir betrachten die folgende Umsortierung (zwei positive, ein negativer Summand) und berechnen die Summe:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}} \pm \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{4k-3}} + \frac{1}{\sqrt{4k-1}} - \frac{1}{\sqrt{2k}} \right).$$

Für den Summanden $\left(\frac{1}{\sqrt{4k-3}} + \frac{1}{\sqrt{4k-1}} - \frac{1}{\sqrt{2k}}\right)$ folgt (nach einer Zwischenrechnung)

$$\lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{4k-3}} + \frac{1}{\sqrt{4k-1}} - \frac{1}{\sqrt{2k}} \right) \sqrt{k} > \frac{\sqrt{8} + \sqrt{8} - \sqrt{16}}{\sqrt{32}} = c_1.$$

Die umsortierte Reihe divergiert also nach dem Minorantenkriterium, da für endliches n

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{4k-3}}+\frac{1}{\sqrt{4k-1}}-\frac{1}{\sqrt{2k}}\right) > c_2 + (c_1-\varepsilon)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$$

mit festen positiven Konstanten c_1 und c_2 gilt und da $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$ divergiert (siehe letzte große Übung).

ERNEUT: DIE UMSORTIERUNG FÜHRT ZU EINEM VÖLLIG VERSCHIEDENEN ERGEBNIS.

- **Thema: Stetigkeit von Funktionen**
  Beispiel 3: $y = f(x) = x^2$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ stetig. Beweis mit Definition 3.1: Zu zeigen: Für eine beliebige Folge (x_n) mit $\lim(x_n) = x^*$ gilt

$$\lim f(x_n) = f(x^*).$$

Hier ist

$$\lim f(x_n) = \lim(x_n)^2 = \lim(x_n \cdot x_n) = \lim x_n \lim x_n = x^* \cdot x^* = f(x^*).$$

Verkettung von Funktionen
$h = g \circ f$, d.h. $h(x) = g(f(x))$ ist stetig.

Satz: Sei $f : D \in \mathbb{R}$ und $g : E \in \mathbb{R}$ mit $f(D) \subseteq E$. Sei f stetig in $a \in D$ und g stetig in $b = f(a) \in E$, dann ist $h = g \circ f : D \in \mathbb{R}$ mit $h(x) = g(f(x))$ in a stetig.

Mit Beweis.

Beispiel 4:

$$h(x) = \sin(\sqrt{x}).$$

Mit $f(x) = \sqrt{x}, g(y) = \sin y$. Die Definitions- und Wertebereiche sind: $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $g : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, also $h : \mathbb{R}_{\geq 0} \to [-1, 1]$.

h ist stetig, denn:

  - Die Sinusfunktion ist stetig, (dies wiederum folgt, da die Exponentialfunktion stetig ist, aus $\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$).
  - Die Wurzelfunktion ist stetig, (das geht so ähnlich wie oben bei $f(x) = x^2$).
  - Nach dem obigen Satz ist h stetig.

- **Thema: Differentialrechnung (bzw. nach Rechtschreibreform Differenzial...)**

Beispiele zu den Ableitungsregeln
Beispiel 5:
$y = f(x) = x^{1/2}$.

$$\begin{aligned} f'(x^*) &= \lim_{x \to x^*} \tfrac{f(x)-f(x^*)}{x-x^*} = \lim_{x \to x^*} \tfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x^*}}{x-x^*} \\ &\quad \text{Standardtrick mit 3. binomischen Formel} \\ &= \lim_{x \to x^*} \tfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x^*}}{x-x^*} \tfrac{\sqrt{x}+\sqrt{x^*}}{\sqrt{x}+\sqrt{x^*}} \\ &= \lim_{x \to x^*} \tfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x^*}} = \tfrac{1}{2\sqrt{x^*}}. \end{aligned}$$

Kettenregel in Leibnizschreibweise:
Ist $y = f(u)$ und $u = g(x)$, also $y = f(g(x))$, so ist $y' = f'(g(x))g'(x)$, bzw.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$

Die sogenannte Leibnizschreibweise mit den dy und dx usw. ist nützlich.

Beispiel 6:
Es sei $y = f(x) = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^3$ also $y' = f'(x) = 3\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2 \left(\frac{1+x}{1-x}\right)'$. Nebenrechnung mit Quotientenregel ergibt: $\left(\frac{1+x}{1-x}\right)' = \frac{2}{(1-x)^2}$, also

$$y' = f'(x) = 6\frac{(1+x)^2}{(1-x)^4}.$$

Beispiel 7:
Wir rechnen einige der Grundregeln nach. Wir setzen $(e^x)' = e^x$ und für die Umkehrfunktion $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ voraus.

- $f(x) = a^x = e^{(\ln a)x}$. Wegen $(e^x)' = e^x$ und mit der Kettenregel folgt $f'(x) = (\ln a)e^{(\ln a)x} = (\ln a)a^x$.
- Wie kann man die Regel für $f(x) = x^a$ herleiten? (a eine reelle Zahl). $f(x) = x^a = e^{a \ln x}$. Daher ist für $x > 0$:

$$f'(x) = (a \ln x)' e^{a \ln x} = \frac{a}{x} x^a = a x^{a-1}.$$

Der Trick $z = e^{\ln z}$ ist allgemein nützlich, z.B. für Funktionen vom Typ $y = f(x)^{g(x)} = e^{(\ln f(x))g(x)}$. (Hierbei ist $f(x) > 0$ vorausgesetzt.)