Behandelte Themen und Beispiele der großen Übung der 5. Woche

- **Thema: Alte Aufgaben**

(Blatt 1, H1b)

(Blatt 2, H1b)

(Blatt 2, H2b)

- **Thema: Ableitung der Umkehrfunktion**
  Gesucht ist die Ableitung von $\arctan x$. Wir setzen $f(x) = \tan x$ und $f^{-1}(x) = \arctan x$. Es gilt: $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$.

  Man benötigt also auch die Ableitung des Tangens. Mit der Quotientenregel folgt $f'(x) = 1 + \tan^2 x$.

  Daher folgt:

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1 + \tan(\arctan x)} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

- **Thema: Taylorreihen:**
  Allgemeines über Taylorreihen, Konvergenz usw.

  Graphiken zum Beispiel $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \cdots$.

  Herleitung der Taylorreihe von $\cos x$ um $x_0 = 0$ mit Diskussion des Restgliedes. Analog für $\sin x$ um $x_0 = 1$ und $x_0 = 0$.

  Beispiel: Man möchte die Sinuswerte im Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ durch ein endliches Taylorpolynom approximieren. Der Fehler soll kleiner als $\frac{1}{1000}$ sein.

  Es ist $\sin x = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + R_{2n+1}(x, 0)$.

  Die Ableitungen sind vom Betrag alle ≤ 1. Weiter soll gelten $|R_{2n+1}(x, 0)| \leq \frac{(\frac{\pi}{2})^{2k+2}}{(2k+2)!} \overset{!}{\leq} \frac{1}{1000}$. Dies gilt für $2k + 2 \geq 8$.
  Daher gilt

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!}$$

  für $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ mit einem Fehler, der kleiner als $\frac{1}{1000}$ ist. So ist z.B. für $x = \frac{\pi}{2}$ einerseits $\sin x = 1$, andererseits ergibt die Näherung 0.99984.