**Integralrechnung Beispiel 1 (Partielle Integration):**

$$\int \sinh^2 x\,dx = \int \sinh x \sinh x\,dx$$

Partielle Integration: $u = \sinh x, v' = \sinh x$, also $u' = \cosh x$ und $v = \cosh x$. Also

$$\begin{aligned}
\int \sinh^2 x\,dx &= \sinh x \cosh x - \int \cosh^2 x\,dx \\
&\quad \text{mit } \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \text{ folgt} \\
&= \sinh x \cosh x - \int (1 + \sinh^2 x)\,dx \\
2\int \sinh^2 x\,dx &= \sinh x \cosh x - x \\
&\quad \text{also} \\
\int \sinh^2 x\,dx &= -\frac{x}{2} + \frac{\sinh x \cosh x}{2}
\end{aligned}$$

(plus eine beliebige Konstante !)

**Beispiel 2 (Integration durch Substitution):**

$$\int_1^2 \sqrt{|\,1 - x|x|\,|}\,dx = \int_1^2 \sqrt{x^2 - 1}\,dx.$$

Bei derartigen Integralen benötigt man Substitutionen, die auf den ersten Blick merkwürdig erscheinen. Bei Gleichungen, die in $x$ quadratisch sind, (die geometrisch also meist mit dem Kreis oder einer Hyperbel zu tun haben), sind die Kreisfunktionene (sin und cos) und die hyperbolischen Funktionen (sinh und cosh) aber sehr nützlich. Das liegt auch an den einfachen Ableitungsregeln

$$(\sin x)' = \cos x, (\cos x)' = -\sin x, (\sinh x)' = \cosh x, (\cosh x)' = \sinh x$$

und an den Formeln:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

Wir wählen (und hinterher werden wir sehen, dass dies sinnvoll war!) $x = \cosh u$. Daher gilt für die Umkehrfunktion: $u = \mathrm{Arcosh} x$.
Wegen $\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$ ist $\sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{\sinh^2 u} = \sinh u$.
(Dies war also der Grund für die Wahl der Substitution!)
Bei Integration durch Substitution muss man noch $dx$ in $du$ umrechnen! Aus $x = \cosh u$ folgt durch Ableiten: $\frac{dx}{du} = \sinh u$, also $dx = \sinh u\,du$.
Setzt man dies ein, so folgt:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{x^2 - 1}\,dx &= \int \sinh u^2\,du \\
&= -\frac{u}{2} + \frac{\sinh u \cosh u}{2}.
\end{aligned}$$

Nun haben wir die Integration bezüglich $u$ beendet, aber wir wollen ein Ergebnis bezüglich $x$ haben. Wir machen die Substitution rückgängig: Es ist $u = Arcoshx$. Also ist $\cosh u = x$ und $\sinh u =$

$\sqrt{\cosh^2 u - 1} = \sqrt{x^2-1}$. Daher folgt:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{x^2-1}\,dx &= -\frac{u}{2} + \frac{\sinh u \cosh u}{2} \\
&= -\frac{\mathrm{Arcosh} x}{2} + \frac{x\sqrt{x^2-1}}{2}.
\end{aligned}$$

Einsetzen der Grenzen ergibt (mit Arcosh 1=0, wegen $\cosh 0 = 1$):

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \sqrt{x^2-1}\,dx &= \sqrt{3} - \frac{\mathrm{Arcosh} 2}{2} \\
\text{oder} &= \sqrt{3} - \frac{\ln(2+\sqrt{3})}{2} \approx 1,07\cdots
\end{aligned}$$

Beide Ergebnisse sind identisch: so wie man den Cosinus hyperbolicus durch die Exponnetialfunktion ausdrücken kann, kann man auch die Umkehrfunktionen, den Area cosinus hyperlicus, durch den Logarithmus ausdrücken.

Ein anderer Weg:

In Satz 7.7 (und in vielen Formelsammlungen) sieht man, dass man die Rücksubstitution auch in anderer Form vornehmen kann, nämlich die umgerechneten Grenzen einsetzt. Das sieht dann wie folgt aus, ist aber letztlich genauso viel Arbeit:

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \sqrt{x^2-1}\,dx &= \int_{\mathrm{Arcosh}(1)}^{\mathrm{Arcosh}(2)} \sinh^2 u\,du \\
&= \int_0^{\mathrm{Arcosh}2} \sinh^2 u\,du \\
&= -\frac{u}{2} + \frac{\sinh u \cosh u}{2}\bigg|_0^{\mathrm{Arcosh}(2)}.
\end{aligned}$$

und an dieser Stelle sieht man, dass man doch wieder den gleichne Umformungsaufwand betreiben muss, z.B.:

$$\sinh(\mathrm{Arcosh}(2)) = \sqrt{\cosh^2(\mathrm{Arcosh}2) - 1} = \sqrt{3},$$

und es folgt das gleiche Ergebnis wie oben.