Behandelte Themen und Beispiele der großen Übung der 8. Woche

Thema Differentialgleichungen: Diskussion von $y''' + y = x^2e^x$.
Schritt 1:
Homegene Dgl. $y''' + y = 0$ lösen.
Polynom $\lambda^3 + 1 = 0$ hat die Nullstellen

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}), \lambda_3 = \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3}).$$

Eine allgemeine Lösung ist also:

$$y_{hom}(x) = C_1e^{-x} + C_2e^{\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})x} + C_3e^{\frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})x}.$$

Oft sucht man aber eine REELLE Lösung: Wir haben ausführlich nachgerechnet, dass der reelle Teil der obigen Lösungsmenge identisch ist mit

$$y_{hom}(x) = C_1e^{-x} + C_4e^{\frac{x}{2}}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + C_4e^{\frac{x}{2}}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x) \quad C_1, C_4, C_5 \in \mathbb{R}.$$

Schritt 2:
Eine spezielle Lösung der inhomogenen Dgl. finden. Ansatz: $y = (Ax^2+Bx+C)e^x$, da rechts eine Funktion der Form e^x mal Polynom vom Grad zwei steht, ist dies der richtige Ansatz.
(Falls rechts z.B. steht, $e^{3x}\sin(2x)$, so wäre der Ansatz: $Ae^{3x}\sin(2x)+Be^{3x}\cos(2x)$.)
Also obiges y dreimal ableiten und in die Dgl. einsetzen ergibt:

$$e^x(Ax^2 + (B + 6A)x + 6A + 3b + C) + e^x(Ax^2 + Bx + C) = x^2e^x.$$

Koeffizientenvergleich liefert: für $x^2e^x : A+A = 1$, für $xe^x : B+6A+B = 0$ und für $x^0e^x : 6A+3BC+C = 0$, also $A = \frac{1}{2}, B = -\frac{3}{2}, C = \frac{3}{4}$.
$y_S = (\frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}x + \frac{3}{4})e^x$.
Schritt 3:

$$y_{allgemein} = y_s + y_{hom}.$$

4)
In der Praxis ist oft durch Zusatzbedingungen die Lösung eindeutig. Beispiel ein Pendel wird um a ausgelenkt und zum Zeitpunkt $x = 0$ losgelassen. Dann ist $y(0) = a$ die Geschwindigkeit ist $y'(0) = 0$, die Beschleunigung ist der Anteil der Erdbeschleunigung, der in Richtung der Pendelschwingung geht, also ist $y''(0)$ durch den Auslenkungswinkel, abhängig von der Fadenlänge, auch festgelegt.
Eine derartige Bedingung ergibt eine Gleichung, z.B. $y(0) = a$ ergibt: $\frac{3}{4} + C_1 + C_4 + 0 = a$. Bei einer Dgl. mit drei freien Parametern (C_1, C_4, C_5) führen drei derartige Bedingungen dann (meistens) zu einer eindeutigen Lösung.

Integralrechnung

Man berechne $\int \frac{4x}{(x^2+4)(x^2+1)}\,dx$. Wir integrieren zunächst und setzen am Ende die Grenzen ein. Man kann eine Partialbruchzerlegung vornehmen, oder zuerst etwas vereinfachen. $u = x^2$, also $du = 2x\,dx$ führt auf $\int \frac{4x}{(x^2+4)(x^2+1)}\,dx = \int \frac{2}{(u+4)(u+1)}\,du$.

Jetzt eine Partialbruchzerlegung:

der Ansatz $\frac{2}{(u+4)(u+1)} = \frac{A}{u+4} + \frac{B}{u+1}$ liefert $\frac{2}{(u+4)(u+1)} = \frac{2}{3}\frac{1}{u+1} - \frac{2}{3}\frac{1}{u+1}$.

Also: $\int \frac{2}{(u+4)(u+1)}\,du = \frac{2}{3}\ln(u+1) - \frac{2}{3}\ln(u+4) = \frac{2}{3}\ln\frac{u+4}{u+1}$. Zurücksubstituieren liefert: schließlich: $\int \frac{4x}{(x^2+4)}(x^2+1)\,dx = \frac{2}{3}\ln\frac{x^2+4}{x^2+1}$.

Falls man $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{4x}{(x^2+4)(x^2+1)}\,dx$ berechnen soll: Man sieht: da der Nennergrad um drei grösser als der Zählergrad ist, existiert das Integral, da $\int_1^\infty \dfrac{dx}{x^3}$ existiert.

Ausserdem ist diese Funktion ungerade, so dass aus Symmetriegründen $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{4x}{(x^2+4)(x^2+1)}\,dx = 0$ gilt.

Berechnen wir es zur Übung dennoch normal mit der Stammfunktion, so folgt:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{4x}{(x^2+4)(x^2+1)}\,dx &= \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{4x}{(x^2+4)(x^2+1)}\,dx \\
&= \lim_{R\to\infty} \left(\frac{2}{3}\ln\frac{R^2+4}{R^2+1} - \frac{2}{3}\ln\frac{(-R)^2+4}{(-R)^2+1}\right) = 0.
\end{aligned}$$