Blatt 1
14.04.2003

Algebra II

SS 2003
Dr. habil. Elsholtz

Ein paar Formalia zur Vorlesung.
Die Vorlesung wird als 3+1 Veranstaltung gehalten. Es besteht die Möglichkeit, Hausaufgaben abzugeben. Die Hausaufgaben werden von Alexander Herzog korrigiert.

Aufgabe 1
Beweis von Satz 3.1.2

Aufgabe 2
Beweis von Satz 3.1.4

Aufgabe 3
Man zerlege die folgenden Polynome in irreduzible Faktoren, oder beweise, daß das betreffende Polynom bereits irreduzibel ist.
(a) $X^2 + 5X + 1$ in $\mathbb{Z}[X]$,
(b) $X^2 + 1$ in $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})[X]$ und $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})[X]$,
(c) $X^5 - kX + 1$ ($k \in \mathbb{Z}$ ein Parameter) in $\mathbb{Q}[X]$,
(d) $X^3 - 3$ in $K[X]$ mit $K = \{a + b\sqrt{2} \, : \, a, b \in \mathbb{Q}\}$,
(e) $X^2 + Y^2 - 1$ in $\mathbb{C}[X, Y]$,
(f) $X^4 + 4Y^4$ in $\mathbb{Z}[i][X, Y]$ und in $\mathbb{Z}[X, Y]$.

Aufgabe 4
Man untersuche folgende Polynome in $\mathbb{Q}[X]$ auf Irreduzibilität:

a) $f = X^5 + 3X^2 + 3$

b) $f = X^2 + X + 1$

c) $f = X^5 + 3X^2 + 1$

Aufgabe 5
Man untersuche folgende Polynome in $\mathbb{Q}[X]$ auf Irreduzibilität:

(a) $f = \frac{2}{15}X^5 + \frac{4}{5}X^4 - X^3 + \frac{6}{5}X^2 - 3X + \frac{1}{5}$

(b) $f = X^3 + 2X^2 + 4X + 4$

(c) $f = X^3 + 2X^2 + 2X + 4$

(d) $f = 4X^3 + 4X^2 + 2X + 1$

(e) $f = X^4 + 6X^3 + 12X^2 + 12X + 7$

(f) $f = X^4 + 6X^3 + 12X^2 + 12X + 5$

(g) $f = X^4 + 15X^3 + 7$

(h) $f = 2X^4 + 11X^3 + 20X^2 + 14X + 3$

(i) $f = X^{500} + X^{375} + X^{250} + X^{125} + 1$

Aufgabe 6 (Eisenstein rückwärts)

(a) Man beweise: Sei $f \in \mathbb{Z}[X]$ mit $f(x) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$. Sei $p \nmid a_0, p|a_1, \ldots, p|a_n$ aber $p^2 \nmid a_n$, dann ist f irreduzibel über $\mathbb{Q}[X]$.

(b) Man beweise oder widerlege: Sei $f \in \mathbb{Z}[x]$. Wenn es keine Primzahl p gibt, so daß die Koeffizienten von f die Eisensteinbedingungen für p erfüllen, dann ist f reduzibel.

Aufgabe 7

Sei p eine Primzahl. Man bestimme die Anzahl der irreduziblen Polynome vom Grad 2 und Grad 3 in $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$.

Wer über Ostern eine richtige Nuss braucht, kann sich an 3f) und 5i) versuchen.