Blatt 2
28.04.2003

Algebra II

SS 2003
Dr. habil. Elsholtz

Aufgabe 1

a) (Satz 4.4.2): Es seien f und g vom Nullpolynom verschiedene Polynome über einem Körper K. Es sei $d =$ ggT (f, g). Man zeige, dass es zwei Polynome $a, b \in K[t]$ gibt, so dass $d = af + bg$ gilt. (Hinweis: Euklidischer Algorithmus).

b) Man betrachte die beiden Polynome $f(X) = X^5+X^4+X^3+X^2+X+1$ und $g(X) = X^4+X^3+X+1$ in $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]$, bestimme ihren GGT und drücke diesen als Linearkombination von f und g aus.

Aufgabe 2

a) Man zeige, dass $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} : a, b, c, d, \in \mathbb{Q}\}$ gilt.

b) Kann man $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ als einfache Körpererweiterung über $\mathbb{Q}$ schreiben? (Mit Beweis).

c) Zeigen Sie, dass $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ irrational ist.

Aufgabe 3

Seien a und b teilerfremde natürliche Zahlen und $x, y \in \mathbb{C}$ mit $x^a = 2$, $y^b = 3$. Man zeige $\mathbb{Q}(x, y) = \mathbb{Q}(x \cdot y)$ und bestimme das Minimalpolynom von $x \cdot y$ über $\mathbb{Q}$.

Aufgabe 4

Man betrachte

$$A = \{a \in \mathbb{R} : a \text{ ist algebraisch über } \mathbb{Q}\}.$$

a) Man zeige, dass A abzählbar ist.

b) Folgern Sie, dass es transzendente relle Zahlen geben muss.

c) Man gebe eine unendliche Kette von (echten) Körpererweiterungen an, die man man zwischen die Körpererweiterung $A : \mathbb{Q}$ einfügen kann.