Blatt 3
15.05.2003

Algebra II

SS 2003
Dr. habil. Elsholtz

Aufgabe 1
Beweisen Sie: Ein Polynom $f \in K[t]$ (wobei $f \not\equiv 0$) hat eine mehrfache Nullstelle in dem Zerfällungskörper genau dann wenn f und die formale Ableitung Df einen gemeinsamen Faktor vom Grad ≥ 1 haben.

Aufgabe 2
Sei L/K eine Körpererweiterung, $a \in L$ algebraisch. Der Grad des Minimalpolynoms von a sei r. Weiter sei n eine beliebige natürliche Zahl. Man überlege sich, ob es eine Formel für $[K(a^n) : K]$ gibt, die nur von r und n abhängt.

Aufgabe 3

a) Sei L/K eine Körpererweiterung, und seien $\alpha, \beta \in L$, so dass $\alpha + \beta$ und $\alpha \cdot \beta$ algebraisch über K sind. Man zeige: Dann sind auch α und β algebraisch über K.

b) Suchen Sie in einem geeigneten Algebrabuch die Definition von elementarsymmetrischen Funktionen.

c) Sei L/K eine Körpererweiterung, $n \in \mathbb{N}$ und $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in L$, so dass

$$\sigma_1(\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \ldots, \sigma_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

algebraisch über K sind. Dabei sind $\sigma_i\,(1 \leq i \leq n)$ die elementarsymmetrischen Funktionen in n Variablen. Man zeige: Unter diesen Voraussetzungen sind auch $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ algebraisch über K.

Aufgabe 4
Sei K Körper, $p \in K[X]$ irreduzibel und $F = K[X]/(p)$. Weiter sei L/K eine Körpererweiterung. Man zeige:

(i) Die Anzahl der K-Einbettungen von F in L ist höchstens $\deg p$.

(ii) Seien $a, b \in L$ mit $p(a) = p(b) = 0$. Dann gibt es einen Isomorphismus $\varphi : K(a) \to K(b)$ mit $\varphi_{|K} = id$.

Aufgabe 5
Seien $p_1, \dots, p_n$ verschiedene Primzahlen aus $\mathbb{N}$. Man zeige

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_n}) : \mathbb{Q}] = 2^n$$

und folgere

$$[A : \mathbb{Q}] = \infty;$$

dabei bezeichnet A die algebraischen Zahlen über $\mathbb{Q}$.

Aufgabe 6
Es seien K/L und L/M jeweils normale Körpererweiterungen. Folgt dann, dass auch K/M normal sein muß?

Aufgabe 7
Es sei $f = X^4 - 2$.

(i) Man gebe den Zerfällungskörper L von f über $\mathbb{Q}$, den Grad der Körpererweiterung $L : \mathbb{Q}$ und ein primitives Element, also ein α mit $L = \mathbb{Q}(\alpha)$.

(ii) Man bestimme die Automorphismen von L und berechne die Galois-Gruppe $G = \mathit{Gal}\, L/\mathbb{Q}$.

(iii) Man gebe alle Untergruppen der Galois-Gruppe G und alle Unterkörper des Zerfällungskörpers L in einem Diagramm an.

(iv) Welche der Untergruppen sind Normalteiler von G und welche Zwischenkörper sind normal über $\mathbb{Q}$?