Blatt 4
16.06.2003

Algebra II

SS 2003
Dr. habil. Elsholtz

Da die letzten Aufgaben etwas abstrakt waren, hier ein paar konkrete Aufgaben.

Aufgabe 1
Eine Körpererweiterung heißt galoissch, wenn sie endlich, normal und separabel ist.

(i) Ist die Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{2}})/\mathbb{Q}$ galoissch? Wenn ja, berechne man die Galois-Gruppe der Körpererweiterung.

(ii) Man untersuche analog die Körpererweiterung $\mathbb{Q}\left(\sqrt{1+\sqrt{2}}\right)/\mathbb{Q}$.

Aufgabe 2
Es sei K ein Körper, $f \in K[X]$ ein irreduzibles und separables Polynom. L sei der Zerfällungskörper von f über K. Die Erweiterung L/K ist also galoissch. Man zeige: Ist $Gal(L/K)$ abelsch, so gilt $L = K(\alpha)$ für jede Nullstelle $\alpha \in L$ von f.

Aufgabe 3

(i) Man berechne die Galois-Gruppen $Gal(\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})/\mathbb{Q})$ bzw. $Gal(\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})/\mathbb{Q})$ und gebe alle Untergruppen bzw. alle Zwischenkörper an. Weiterhin stelle man die Beziehungen der Untergruppen bzw. Zwischenkörper in einem Diagramm dar.

(ii) Seien $p_1, \ldots, p_n$ verschiedene Primzahlen. Man zeige, dass $Gal(\mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_n})/\mathbb{Q})$ eine Gruppe mit 2^n Elementen ist, wobei für jedes Element a gilt: $a^2 = id$. Ist die Galois-Gruppe abelsch? (Es kann eine frühere Aufgabe verwendet werden.)

Aufgabe 4
Sei $f = X^5 - 6X + 3 \in \mathbb{Q}[X]$.

(i) Man zeige: f ist irreduzibel und separabel. Wieviele reelle Nullstellen hat f?

(ii) Sei L der Zerfällungskörper von f über $\mathbb{Q}$. Man zeige $G = Gal(L/\mathbb{Q}) \cong S_5$.

Ein möglicher Lösungsweg: Um Automorphismen zu finden, betrachte man die Nullstellen von f. Man zeige, dass G eine Transposition und einen 5-Zykel enthält. Man zeige weiter, daß eine Transposition und ein 5-Zykel bereits S_5 erzeugen.

Aufgabe 5

(i) Sei p prim. Sei $f \in \mathbb{Q}[x]$ ein irreduzibles Polynom vom Grad p mit genau $p-2$ reellen Nullstellen. Man zeige, dass $Gal(f, \mathbb{Q}) = S_p$ ist. (Hierbei ist $Gal(f, \mathbb{Q}) := Gal(L\mathbb{Q})$, wobei L der Zerfällungskörper von f ist.)

(ii) Man konstruiere für jede Primzahl p ein Polynom mit den Eigenschaften aus (i). (Tip: Man denke an gerade Koeffizienten.)

(iii) Sei n ungerade und $g \in \mathbb{Q}[x]$ ein irreduzibles Polynom vom Grad n. Man beweise, daß alle Nullstellen reell sind, wenn die Galois-Gruppe $Gal(g, \mathbb{Q})$ zyklisch ist.

Aufgabe 6

Sei K ein Körper mit char $K \neq 2, 3$. Weiter sei $f \in K[X]$ irreduzibel und vom Grad 3. L sei der Zerfällungskörper von f über K, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ seien die Nullstellen von f in L und $\Delta = \prod_{1 \leq i < j \leq 3} (\alpha_i - \alpha_j)^2$ die Diskriminante von f. Dann gilt $Gal(L/K) \cong S_3$, falls Δ kein Quadrat in K ist; andernfalls ist $Gal(L/K) \cong A_3$.

Die Aufgaben werden voraussichtlich in der Übung vom 7. Juli besprochen. Lösungen bitte bis Do. 3. Juli abgeben.