

2. Test Analysis T2, 14.06.2013

Name, Vorname	Matr.nummer	Fachrichtung

Aufgabe	1	2	3		Σ	
Max. Punkte	7	10	8		25	
bearbeitet ? bitte ankreuzen!						
erreichte Punkte						

BEGINNEN SIE ALLE AUFGABEN AUF JEWEILS EINEM NEUEN BLATT UND SCHREIBEN SIE AUF JEDES BLATT IHREN NAMEN UND MATRIKELNUMMER!!!

Es wird nicht nur das Ergebnis, sondern insbesondere auch der Rechenweg bewertet. Begründen Sie Ihre Schritte ausreichend. Wenn Sie bei einer Aufgabe nicht weiterkommen, z.B. weil bereits ein Rechenfehler vorliegt, beschreiben Sie bitte möglichst genau das prinzipielle Vorgehen, mit dem Sie die Aufgabe angehen wollten.

Es sind *keine* elektronischen Hilfsmittel erlaubt.

Viel Erfolg!

- 1) (5+2 Punkte) a) Es sei $f(x) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ die 2π -periodische Funktion, die im Intervall $[-\pi, \pi)$ durch
- $$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < \pi \\ 0 & -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$
- definiert ist. Berechnen Sie die (reelle) Fourierentwicklung von f , d.h. berechnen Sie **alle** Koeffizienten und schreiben Sie die Summe bis $n = 5$ explizit hin.

- b) Welchen Werte nimmt die Fourier-Reihe für $x = 0$ an? Stimmt der Wert der Reihe an dieser Stelle mit $f(x)$ überein?
Geben Sie mithilfe der Reihe den Wert von

$$\sum_{n=1, n \text{ ungerade}}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

an.

Hinweis: Mathematica, oder eine Integraltabelle liefert:

$$\text{Integrate}[x \text{Cos}[x], x] = \text{Cos}[x] + x \text{Sin}[x]$$

$$\text{Integrate}[x \text{Sin}[x], x] = -x \text{Cos}[x] + \text{Sin}[x]$$

$$\text{Integrate}[x \text{Cos}[kx], x] = \text{Cos}[kx]/k^2 + (x \text{Sin}[kx])/k$$

$$\text{Integrate}[x \text{Sin}[kx], x] = (\text{hier nicht angegeben}).$$

- 2)(2+2+2+4 Punkte) a) Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) = \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$ die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen erfüllt.
- b) Erklären Sie, warum $\sin(iz) = i \sinh z$ gilt.
- c) Welche Form der Singularität hat die Funktion $h(z) = \frac{1}{\sinh^2 z}$ an der Stelle $z = 0$?
- d) Es sei $S = \{z \in \mathbb{C} : |\text{Im } z| \leq 1\}$. (Zeichnen Sie S .) Es sei $f : S \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) = \exp(-z^2)$. Bestimmen Sie $z_0 \in S$, so dass $|f(z)|$ maximal wird. Wenn es mehrere z_0 gibt, die den gleichen maximalen Wert ergeben, geben Sie bitte alle diese Werte an.

- 3) (1+4+3 Punkte) a) Berechnen Sie

$$\oint_{|z|=1} \left(\sum_{n=-100}^{100} \frac{1}{(n^2)!} z^n \right) dz$$

wobei der Integrationsweg der im Gegenuhrzeigersinn durchlaufene Einheitskreis sei.

- b) Berechnen Sie

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(3x) dx}{(x^2 + 9)}.$$

Beschreiben Sie die Methode (Erläuterung des Integrationsweges und möglichst Abschätzung der Details). Folgern Sie daraus den Wert von

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(3x) dx}{(x^2 + 9)}.$$

- c) Berechnen Sie

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 + 2i \sin x}.$$