Name: **Matrikelnr.:** **Übungsgruppe:**

Einführung in die Algebra — 23. Juni 2015

Klausur

Aufgabe	1	2	3	4	5	Σ
Punkte	5	3	5	8	5	=26 = *Punkte*

Es wird nicht nur das Ergebnis, sondern insbesondere auch der Rechenweg/die Argumentation bewertet. Begründen Sie Ihre Schritte ausreichend, d.h. z.B., wenn Sie einen Satz aus der Vorlesung verwenden, sollte das klar werden, (zB. "Ein Satz der Vorlesung besagt, dass jede Gruppe mit Eigenschaft A auch Eigenschaft B hat.")

Wenn Sie bei einer Aufgabe nicht weiterkommen, beschreiben Sie bitte möglichst genau das prinzipielle Vorgehen, mit dem Sie die Aufgabe angehen wollten.

Es sind *keine* elektronischen Hilfsmittel erlaubt.

Viel Erfolg!

1. Geben Sie möglichst viele verschiedene (=nichtisomorphe) Gruppen der Ordnung $|G| = 24$ an. (Bitte ganz kurz erläutern, warum sie verschieden sind, bzw. ganz kurz eine besondere Eigenschaft der Gruppe angeben).

2. Formulieren Sie den Satz von Lagrange (über die Ordnung von Untergruppen).
   Geben Sie ein Beispiel für diesen Satz an.
   Kann man den Satz verschärfen, indem man ihn mit einem "... genau dann wenn ..." formuliert? (Bitte genauer erläutern, ggf. auch mit Beispiel.)

3. Es sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe mit $|G| = 35$. Zeigen Sie, dass $(G, \cdot)$ isomorph zur zyklischen Gruppe C_{35} ist.

   (Auch wenn Sie dies nicht lösen können, tragen Sie möglichst viel Teilinformation über Untergruppen und Elemente mit gegebener Ordnung zusammen).

4. a) Gegeben sei ein Ring $(R, +, \cdot)$.
   Definieren Sie: I ist ein Ideal von R.
   Hat jeder Ring ein Ideal (oder mehrere Ideale)?

   b) Es sei gegeben der Ring $R = \mathbb{Z}[i] = \{a+b\,i : a, b \in \mathbb{Z}, i^2 = -1\}$, mit Addition und Multiplikation der komplexen Zahlen, und Normabbildung $N(a + bi) = a^2 + b^2$.

   b1) Formulieren Sie, was die Aussage "R ist ein euklidischer Ring" bedeutet.

   Im folgenden dürfen Sie, ohne Beweis, annehmen, dass R ein euklidischer Ring ist.

   b2) Es seien $\sigma, \tau \in R$ und es sei $I = (\sigma, \tau)$ das von σ und τ erzeugte Ideal. Zeigen Sie, dass es ein $\mu \in R$ gibt, so dass $I = (\mu)$ gilt.

   b3) Es sei nun $\sigma = 4 - 4i$ und $\tau = 3 + 3i$. Geben Sie eine Zerlegung von σ und τ in Primfaktoren an, und erläutern sie, inwieweit diese eindeutig ist, und was "Primfaktoren" mit "irreduziblen" Elementen zu tun haben.

   b4) Geben Sie auch $\mathrm{ggT}(\sigma, \tau)$ an. Beschreiben Sie das Ideal $I = (\sigma, \tau)$ möglichst explizit, und geben Sie ein μ and, so dass $I = (\mu)$ gilt.

   b5) Warum ist $R = \mathbb{Z}[i]$ kein Körper? Kann man R zu einem Körper ergänzen?

5. Es sei $f \in \mathbb{Z}[x]$ ein Polynom mit $f(x) = x^3 + 4x + 2$.

   a) Geben Sie ein allgemeines Kriterium an, das impliziert, dass f irreduzibel über $\mathbb{Z}$ ist.

   b) Ist f auch irreduzibel über $\mathbb{Q}$?

   c) Ist f auch irreduzibel über $\mathbb{R}$?

   d) Beweisen Sie nun direkt, ohne Verwendung ihres vorigen allgemeinen Kriteriums, dass f irreduzibel über $\mathbb{Z}$ ist. (Bzw.: Sie können Ihr Kriterium in diesem Spezialfall beweisen).