EINFÜHRUNG IN DIE ALGEBRA ÜBUNG SS 2017

1. Übungsblatt für den 15.3.2017

1. Auf der Menge $\mathbb{R}$ aller reellen Zahlen wird eine Operation $\diamond$ folgendermaßen definiert:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}: \qquad x \diamond y := xy + 2x + 2y + 2 \ .$$

Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}$ mit der Verknüpfung $\diamond$ eine kommutative Halbgruppe ist und ein neutrales Element besitzt!
Bestimmen Sie alle invertierbaren Elemente, und geben Sie deren Inverse an!

2. Es sei $(G, \circ)$ eine Gruppe. Beweisen Sie, dass für beliebige $g, h \in G$ gilt:
a) $(g \circ h)^{-1} = h^{-1} \circ g^{-1}$
b) Ist $x \in G$ und gilt $g \circ x = h \circ x$, so folgt $g = h$ (Kürzungsregel von rechts).
Gibt es auch eine analoge Kürzungsregel von links?

3. Es sei $(G, \cdot)$ eine Halbgruppe. Beweisen Sie, dass G genau dann eine Gruppe ist, wenn für alle $a, b \in G$ folgende Aussage wahr ist:
es existiert genau ein $x \in G$ mit $a \cdot x = b$ und es existiert genau ein $y \in G$ mit $y \cdot a = b$.

4. Bestimmen Sie mit der Methode von Kapitel 1.3 der Vorlesung alle Gruppen mit 5 Elementen. Wie ließe sich dieses Beispiel mit Satz 1.7.15 der Vorlesung wesentlich kürzer lösen?

5. Es sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe mit neutralem Element $e \in G$ und $a \in G$ ein Element mit endlicher Ordnung $\mathrm{ord}(a) = n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:
a) Für $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ gilt: $a^{k_1} = a^{k_2} \Leftrightarrow n \mid (k_2 - k_1)$.
b) Für $k \in \mathbb{Z}$ gilt: $a^k = e \Leftrightarrow n \mid k$.
c) Für $m \in \mathbb{Z}$ und $b = a^m$ gilt: $\mathrm{ord(b)} = \frac{\mathrm{n}}{\mathrm{ggT(m,n)}}$.